高雄市立高雄女子高級中學 111 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

（記憶版）

計算證明題共 14 題

1. 已知一數列$\langle a_n \rangle$，$a_1=1$，若$a_{n+1}=\dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，$n\geq 1$，$n\in\mathbb{N}$，試求此數列的一般項$a_n=$________。（7 分）

2. 設有 n 個正實數$x_1, x_2, \cdots, x_n$滿足$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=48$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k^2=36$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k^3=27$，則 n 的值為________。（7 分）

3. 若方程式$x^8+ax^4+1=0$恰有四個實根，且四實根為等差數列，則 a 之值為________。（7 分）

4. 方程式$(x^2+4x+3)^2+k=0$有一正根、一負根及二個虛根，求 k 的範圍。（7 分）

5. $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{1^n+2^n}+\sqrt[n]{2^n+3^n}+\cdots+\sqrt[n]{(m-1)^n+m^n}}{m^2}\right)=$？（7 分）

6. 曲線$y=x^2$與$y=2x+15$所圍區域在$x=t$與$x=t+1$之間的面積的最大值。（7 分）

7. 設$f(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x(2t-1)(t-2)^2\,dt$，若$f(a)$極大值為 M，極小值為 m，則$(M,m)=$？（7 分）

8. 平面上有二拋物線Γ_1：$y=x^2+1$，Γ_2：$y=-(x-1)^2$。已知Γ_1與Γ_2有兩條公切線，共有 4 個切點，求此 4 點形成的四邊形的面積。（7 分）

9. 設 G 為ΔABC的重心，直線 L 過 G 分別與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$交於 P、Q，請證明ΔAPQ的面積至少佔ΔABC的面積的$\dfrac{4}{9}$倍。（7 分）

10. 已知矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot A=\begin{bmatrix}3 & -3 & -2\\ -2 & 4 & 2\\ 4 & -6 & -3\end{bmatrix}$。若 $n\in\mathbb{N}$，

$\begin{bmatrix}3 & -3 & -2\\ -2 & 4 & 2\\ 4 & -6 & -3\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_7 & a_8 & a_9\end{bmatrix}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{9}a_i}{a_5}=$？（7 分）

11. 方程式 $\log_2(x^2+20x)-\log_2(4x-3a-\frac{3}{2})=1$ 對 x 有唯一解，求實數 a 的範圍。（7 分）

12. 若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 滿足 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，證明：對於所有自然數 n，數列 $a_n=3^n\cos n\theta$ 每一項均為整數且都不是 3 的倍數。（7 分）

13. 在 ΔABC 中，點 M、N 分別在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 邊上滿足 $\overline{MB}=\overline{BC}=\overline{CN}$，若 R、r 分別為 ΔABC 外接圓半徑和內切圓半徑，求 $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$。（8 分）

14. 設 $x\geq y\geq z\geq w\geq 0$ 且滿足 $5x+4y+3z+6w=2013$，求 $x+y+z+w$ 的最大值 M 與最小值 m 為何？（8 分）