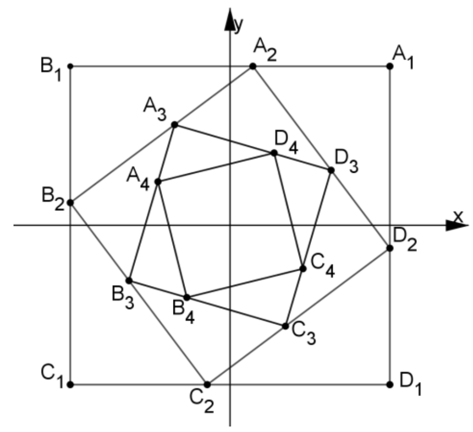
臺中市立臺中女子高級中等學校 111 學年度第二次教師甄選 <u>數學科</u> 試題

壹、填充題：每格 4 分，全對才給分，共 72 分。

1. 某家蛋捲店有五種口味的蛋捲，分別為原味、抹茶、巧克力、芝麻與咖啡五種；購買時以兩包為一組裝成禮盒，這兩包口味可以一樣，也可以不同。某人想同時買三盒禮盒，試問他有__________種組合方式。



2. 如右圖(示意圖)，$A_nB_nC_nD_n$ 均為正方形，n 為正整數，其中 A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1} 分別在 $\overline{A_nB_n}$、$\overline{B_nC_n}$、$\overline{C_nD_n}$、$\overline{D_nA_n}$ 上，且滿足

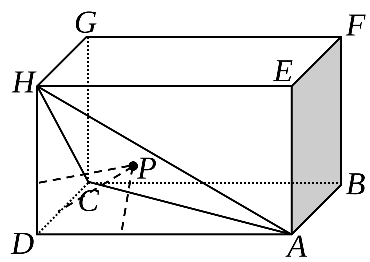
$\overline{A_nA_{n+1}}:\overline{A_{n+1}B_n}=\overline{B_nB_{n+1}}:\overline{B_{n+1}C_n}=\overline{C_nC_{n+1}}:\overline{C_{n+1}D_n}=\overline{D_nD_{n+1}}:\overline{D_{n+1}A_n}=3:4$。

若將這些正方形置於坐標平面上，且 $\overline{A_1B_1}\,/\!/\,\overline{C_1D_1}\,/\!/\,x$ 軸，$\overline{B_1C_1}\,/\!/\,\overline{A_1D_1}\,/\!/\,y$ 軸，

且所有正方形中心均為坐標原點，已知 O 為坐標原點，設 $\overrightarrow{OA_n}=(x_n,y_n)$，$n$ 為正整數。

若有一平面線性變換 T 滿足 $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$，試求 $T=$__________。

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x^2-3x+7}=3$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f(x)$ 在 $x=-1$ 時有極值。若 $y=f(x)$ 和 $y=k$ 所圍成的兩區域面積相等，則 k 值為__________。



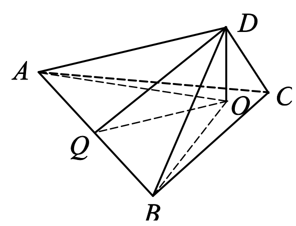
4. 如右圖，在長方體 $ABCD-EFGH$ 中，P 點為 ACH 平面上的一點，

若 $\overline{AD}=12$、$\overline{DH}=6$、$\overline{CD}=6$，設 P 點到 $\overline{AD}$、$\overline{DH}$、$\overline{CD}$ 三邊的距離分別為 d_1、d_2、d_3，則 $d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}$ 的最小值為__________。

5. 設 R 代表坐標平面上由不等式 $1-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0$ 所定義的區域，求函數 $3x-y$ 在區域 R 上的最大值 M 與最小值 m，試問 $M+m=$__________。

6. 已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，且 $\overline{AB}=2$、$\overline{BC}=3$、$\overline{CD}=4$、$\overline{AD}=4$，若 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則 $x-y$ 之值為__________。

7. 四面體 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 的面積分別為 15 與 12，$\overline{AB}=3$，D 在 $\triangle ABC$ 之投影點為 O，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 之二面角為 30°，則四面體 $ABCD$ 的體積為__________。



8. 已知兩複數 z_1 和 z_2 滿足 $|z_1|=1$，$|z_2|=2$，$|z_2-3-4i|=3$。若 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$，且 z_1 的實部為正數，則 $z_1=$__________。

9. 拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 焦點為 F，已知直線 L 斜率為 2，且 L 和 Γ 交於 A,B 兩點。若 $\overline{AF}+\overline{BF}=4$，則 $\overline{AB}$ 長度為__________。

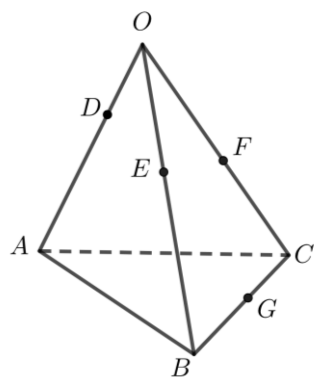
10. 將 $(x-\sqrt{3})^{50}+(x+1)^{50}$ 展開得多項式 $a_{50}x^{50}+a_{49}x^{49}+a_{48}x^{48}+\cdots+a_1x+a_0$，設 $a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots+a_{48}-a_{50}$ 之值為 k，

則 $\log_4|k|$ 之值為__________。

11. 一圓周上有六個等分點按順時針順序依次記為 A、B、C、D、E、F。考慮如下遊戲：開始時將一石子放在出發點 A，今投擲一骰子，若擲出偶數點，則石子順時針前進兩個等分點；若出現奇數點，則石子順時針前進一個等分點。當石子恰好停在 A 點時，則遊戲結束。試問遊戲結束時，石子恰繞圓兩圈的機率為__________。

12. 求 $y=\dfrac{x}{3}(x-3)$ 與 $x=\dfrac{y}{3}(y-3)$ 所圍區域的面積為__________。

13.如右圖，正四面體 $OABC$ 之邊長為 $6\sqrt{2}$，D,E,F,G 四點分別在 $\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC},\overline{BC}$ 上。若 $\overline{OD}=\dfrac{1}{6}\overline{OA}$，$\overline{OE}=\dfrac{1}{3}\overline{OB}$，$\overline{OF}=\dfrac{1}{2}\overline{OC}$ 且 G 為 $\overline{BC}$ 中點，則四面體 $DEFG$ 之體積為__________。



14.設過 $P(-2,5)$ 之直線 L 與圓 $C: x^2+y^2+2x-6y-3=0$ 交於 A、B 兩點。若 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$，則 L 之斜率為__________。

15. 設 x,y,z 為實數，且滿足 $\begin{cases}-2\le x+y+2z\le 3\\ -3\le \quad y+2z\le 1\\ -4\le x+2y+5z\le 3\end{cases}$。當$(x，y，z)=(p，q，r)$時，$2x-3y-8z$ 有最大值為 m，

則序組$(p，q，r，m)=$__________。

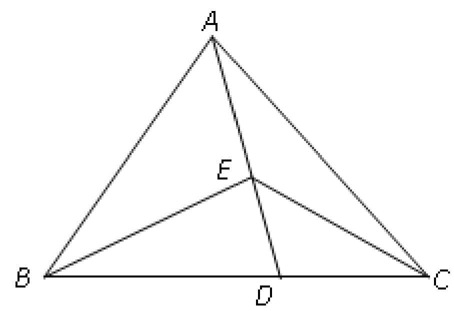
16. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n}[(n^2+nk+k^2)(n+k)^3]=$__________。

17.設 a、b、c 為正實數且 $a+b^2+c^4=28$，$abc=64$，則 $a+b+c=$__________。

18.設 $\langle a_n\rangle$ 為一公差不為 0 的等差數列，已知 a_1 為 a_2 和 a_3 的等比中項，且 S_n 為數列 $\left\langle a_n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\rangle$ 的前 n 項和。若 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=5$，則數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項 $a_1=$__________。

貳、計算證明題：請寫出詳細計算與證明過程，否則不予給分，共 28 分。

1. 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 在 $\overline{BC}$ 上且 E 在 $\overline{AD}$ 上，若 $\angle BED=2\angle CED=\angle A$，求證：$\overline{BD}=2\overline{CD}$。(10 分)



2. ΔABC 中，令 $\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$。若 a,b,c 成等差，試求 $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}$ 之值。(6 分)

3. 考慮一系列方程式 $x-1=0$、$x^2-x-1=0$、$x^3-x^2-x-1=0$、⋯、$x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\cdots-x-1=0$、⋯，

若已知：對任意正整數 k，方程式 $x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\cdots-x-1=0$ 都恰有一個正實根。

(1)設方程式 $x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\cdots-x-1=0$ 的唯一正實根為 α_k（k 為任意正整數），試證：無窮數列 $\langle\alpha_k\rangle$ 為收斂數列。(6 分)

(2)試證 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=2$。(6 分)