

新竹市立香山高級中學 111 學年度教師甄選題目卷

科目：高中數學科

一、單選題(每題 4 分，共計 60 分)

- D 1. 自 $1, 2, 3, \dots, 9$ 這 9 個數中選出 7 個不同的數相加，其和是 3 的倍數，試問共有多少種不同的選法滿足上述條件？
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13
- B 2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 3\angle A$, $\overline{AB} = 48$, $\overline{BC} = 27$ ，則 $\overline{AC} = ?$
(A) 30 (B) 35 (C) 36 (D) 42 (E) 73
- B 3. 試問方程組 $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = y^2 \\ \sin^2 y + \cos^2 x = x^2 \end{cases}$ 的所有實數對解 (x, y) 共有幾組？
(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9
- A 4. 已知 $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ，則 $z_1^{101} + z_2^{101} = ?$
(A) -1 (B) -i (C) 1 (D) i (E) 2
- D 5. 試問 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = ?$
(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $\frac{1}{2}$
- A 6. 方程式 $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{(x+9)^2 - 36}$ 的所有實數解之乘積為下列何者？
(A) 20 (B) 25 (C) 36 (D) 45 (E) 2745
- C 7. 試問滿足分式 $\frac{5n-23}{n-7}$ 是整數值的整數 n 共有幾個？
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14
- B 8. $\triangle ABC$ 中，若三邊長 a, b, c 分別是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊，且 a, b, c 成等差數列，則 $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ 的值為何？
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$
- C 9. 已知二實數 a, b 滿足 $3a^2 + 2022a + 8 = 0$ 及 $8b^2 + 2022b + 3 = 0$ ，其中 $ab \neq 1$ 且 $b \neq 0$ ，則 $\frac{a}{b}$ 之值為何？
(A) $\frac{1}{674}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{1011}{4}$ (E) 674

B 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = ?$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) -2 (E) 2

C 11. 試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = ?$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

D 12. $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle C = 30^\circ$, $\overline{AC} = 2 + 2\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 4$ ，則 $\angle B$ 的度數為幾度？

- (A) 45° (B) 60° (C) 75° (D) 105° (E) 120°

D 13. 設 n 為正整數，如果二次函數 $y = 8^n x^2 - 2^n(2^n + 1)x + 1$ 的圖形與 x 軸交於二點 A_n 、 B_n ，

令線段 $\overline{A_n B_n}$ 之長為 L_n ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} L_n = ?$

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

C 14. 已知 a 為整數，且 $0 \leq x, y, z \leq 2\pi$ ，試問滿足方程式

$$a(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) + 2(1-a)(\cos x + \cos y + \cos z) = 9a - 6$$

的實數解 (x, y, z) 共有幾組？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

C 15. 試問滿足 $m^2 - 4n$ 及 $n^2 - 4m$ 皆為完全平方數的正整數對解 (m, n) 共有幾組？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

二、多選題(每題 8 分，共計 40 分；每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項)

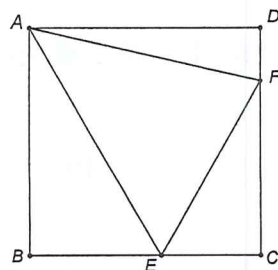
ACDE

1. 如右圖， $ABCD$ 是一個邊長為 $2\sqrt{3}$ 的正方形，

E 、 F 兩點分別在 \overline{BC} 、 \overline{CD} 邊上，若 $\angle BAE = 30^\circ$ ，且 $\angle DAF = 15^\circ$ ，試問下列何者正確？

- (A) $\angle EAF = 45^\circ$ (B) $\angle AEF = 75^\circ$ (C) $\angle CFE = 30^\circ$ (D) $\overline{CE} = 2(\sqrt{3} - 1)$

- (E) $\overline{EF} = 4(\sqrt{3} - 1)$



BCD

2. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圓之面積為 4π ，且 a, b, c 分別為 $\triangle ABC$ 的三個頂點 A, B, C 所對應的邊長。如果 $a^2 + b^2 = c^2$ ，且

$\sin A$ 與 $\sin B$ 正好是一元二次方程式 $(m+5)x^2 - (2m-5)x + 12 = 0$ 的二實根(其中 $m > 0$)，則下列何者正確？

- (A) $m=10$ (B) $m=20$ (C) $c=4$ (D) $a+b=\frac{28}{5}$ (E) $ab=\frac{96}{25}$

BCD

3. 已知一直角三角形的三邊長 a, b, c 都是整數，且 $a < b < c$ 。若此三角形的面積為 630，且周長為 126，

則下列何者正確？

- (A) $b-a=15$ (B) $b-a=17$ (C) $c-b=8$ (D) $c-a=25$ (E) $a+b+c=120$

ABC

4. 設 c 為實數，試問下列何者成立？

(A) 如果 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)]$ 存在，但 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 不存在，則 $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 必不存在。

(B) 如果 $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)}$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 必存在。

(C) 如果對任何實數 x 且 $x \neq c$ ，滿足 $f(x) \leq g(x)$ ，則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 。

(D) 如果對任何實數 x 且 $x \neq c$ ，滿足 $f(x) < g(x)$ ，則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) < \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 。

(E) 如果 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \times g(x)]$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 與 $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 必都存在。

BCE

5. 已知實數 a, b, c 滿足條件 $a = \sqrt{2} + b$ ，且 $2ab + 2\sqrt{2}c^2 + 1 = 0$ ，試問下列何者正確？

- (A) $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $a+b+c=0$