高雄市 111 學年度市立高級中等學校聯合教師甄選

數學科解答卷

【※答案一律寫在答案本上】

(一)、計算題:請寫下完整計算過程，否則不予計分。

(1)~(14)題，每題 6 分，共 84 分。

1.設 A 、 B 兩箱中，A 箱內有一黑一白共兩球，B 箱內則有一白球。甲乙二人輪流取球，每次先由甲自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由乙自 B 箱內任取一球，放回 A 箱內，這樣稱為一局。若重複數局，當達到穩定狀態時，A 箱內有一黑一白球之機率為何？。

A: $x=\frac{2}{3}$

2.解不等式 $|3x-10|-|x^2-6x+5|>5$ 。

A: $0<x<\frac{9-\sqrt{41}}{2}$

3. 如圖 1。$a>\frac{1}{2}$，拋物線 $y=ax^2+2$ 之頂點為 V 且與 $y=-x+4a$ 相交於 B 、 C 兩點。已知 ΔVBC 面積為 $\frac{72}{5}$，試求 a 之值。

A: $a=0,\frac{1}{20},\frac{5}{2}\Rightarrow a=\frac{5}{2}$（因為 $a>\frac{1}{2}$）

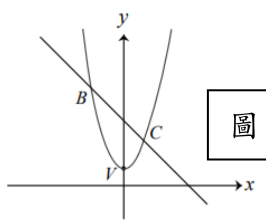

圖 1

4.若 $x>0$，試求函數 $f(x)=\sqrt{x^2+(\log_2 x)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(\log_2 x-1)^2}$ 的最小值？

A: $\sqrt{26}$

5.設$x^4+x^3-4x^2-3x+k=0$有兩根和為-1，求此方程式所有解？

A: $\pm\sqrt{3},\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

6.數列$\langle a_n\rangle$滿足遞迴關係式$\begin{cases} a_1=3,a_2=\frac{7}{4} \\ a_n+\alpha=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\alpha),n\geq 2\end{cases}$，其中$\alpha$為常數，則

$a_{10}=$？

A: $\dfrac{517}{1024}$

7.數列$\langle a_n\rangle$滿足關係式$\log_{n+1}a_n=1+\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$，若$\frac{a_n}{n+1}<1.2$，則自然數$n$的

最小值為？

A:12

8. 坐標平面上有一個橢圓，已知在(8 ,4)、(9 ,11)、(15 ,5) 和(16 ,12) 這四個點中，有兩個是焦點，另外兩個是頂點，則此橢圓的長軸長度=______。

A：$10\sqrt{2}$

9. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數，T_n 為平面上以直線 $y=\dfrac{-1}{2n}x+3$，以及 x 軸、y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=$______。

答案：12

10.美國職業籃球 *NBA* 總決賽採用 7 戰 4 勝制，即若某隊先取得 4 場的勝利，則比賽結束．根據非官方的統計，任兩隊在每一場決賽中取勝的機率相等，且主辦一場決賽，主辦單位有機會透過出售電視轉播權、門票、廣告費及週邊零售商品等收入中獲取的收益達 2400 萬美元，試預估該年度主辦單位在總決賽中收益的期望值為多少萬美元？

A:13950 萬美元．

11.在座標平面上ΔABC內部有一點 P， 若ΔPAB,ΔPBC,ΔPCA其面積比為 3:1:2,

且$\left|2\overrightarrow{NA}+4\overrightarrow{NB}+6\overrightarrow{NC}\right|=36$， 求$\left|\overrightarrow{NP}\right|=$ __________

A: 3

12. 在座標平面上，已知 A=$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7 & 24\\24 & 7\end{bmatrix}$是以直線 L 為鏡射軸的鏡射矩陣，試求鏡射軸 L 的直線方程式 ______________

A: $4x-3y=0$

13. 現有一方陣A_n，其內部的元依以下規則排列

$A_1=[1]$，$A_2=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 5 & 8\\6 & 7 & 9\end{bmatrix}$，請問$A_{32}$的第 12 列第 24 行的元為 _

A: 598

14. 若$\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,3,2)$，$\vec{c}=(-2,3,1)$ 則 $|\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c}|$ 之最小值為___

A: $\frac{4\sqrt{115}}{23}$

(二)、題組題:每題 8 分，共 16 分

1. 若 m、n 均為正整數且$m\geq 2$。鋸齒數列(m,n)為有 n 個齒，且每個齒從 1 開始往上至m後再往下至 1。例如鋸齒數列（3，4）如圖 2 所示

		3				3				3				3		
	2		2		2		2		2		2		2		2	
1				1				1				1				1

圖 2

由上圖可知鋸齒數列$(3,4)$包含17個正整數且其平均為$\frac{33}{17}$。若鋸齒數列(m,n)的所有數字和為145，請找出所有可能之數對(m,n)。

A: $(m,n)=(2,48),(3,18),(5,6),(7,3)$

2.設四次多項式 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$.

(1)選取積分區間 $a\le x\le b$，使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 達到最小值，並求此最小值 .

(2)設 $c>0$，求證 $\int_{-c}^{c} f(x)dx$ 恆為正值 .

解析：(1)取 $0\le x\le 3$ 時，$\int_0^3 f(x)dx=\frac{243}{5}-\frac{243}{2}+99-27=-\frac{9}{10}$ 最小 .

(2) $\int_{-c}^{c} f(x)dx=(\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3-3x^2)\big|_{-c}^{c}$

$=\frac{1}{5}[c^5-(-c)^5]-\frac{3}{2}[c^4-(-c)^4]+\frac{11}{3}[c^3-(-c)^3]-3[c^2-(-c)^2]=\frac{2}{5}c^5+\frac{22}{3}c^3>0$ 恆成立