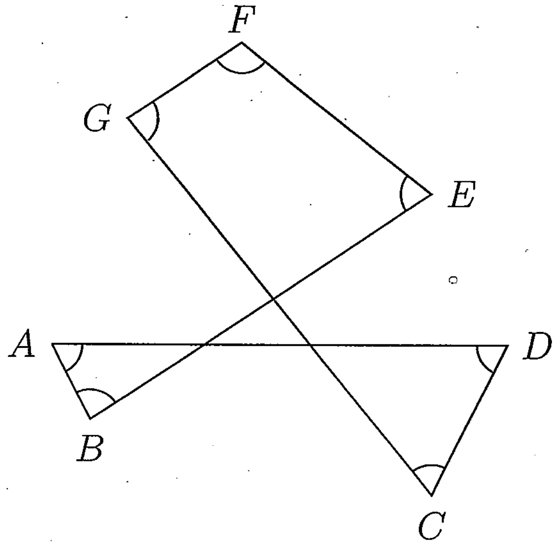
臺北市立華江高中 100學年度第二次正式教師甄選　試題

數學科　考生姓名：__________　准考證號碼：__________

（本試題共3頁，作答於答案卷，否則不予計分）

壹、填充題（每題7分，共計56分）：

1. 如下圖所示：



求角度和

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=\underline{\quad(1)\quad}$$

2. 求乘積的值

$$\sqrt{1+\frac{2}{1}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{4}}\cdots\sqrt{1+\frac{2}{286}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{287}}=\underline{\quad(2)\quad}$$

3. 已知 P 是正四面體 $ABCD$ 內部的一點，而且滿足

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{11},\quad \overline{PC}=\overline{PD}=\sqrt{17},$$

求正四面體 $ABCD$ 的邊長＝$\underline{\quad(3)\quad}$。

4. 求滿足

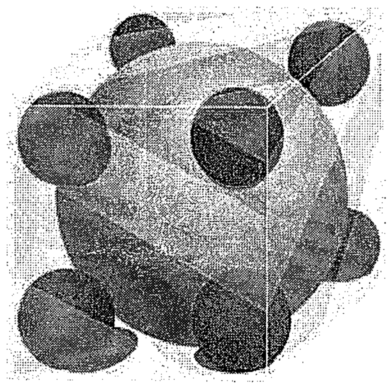
$$\sqrt[3]{\sqrt{a}-2}=\frac{\sqrt{a}-1}{2}$$

的所有正實數 $a=\underline{\quad(4)\quad}$。

5. 英國哥倫比亞大學物理學家懷特海德製作了一組骨牌，第一張重 1 公克最輕，以後每張重量擴大為前一張的 1.5 倍，把這套骨牌按適當間距排好，輕輕推倒第一張，必然會波及到下一張及推倒以後的骨牌。

根據萬有引力定律測得：地球質量為 5.976×10^{27} 公克，試問：懷特海德所排的骨牌中，第 ___(5)___ 張的重量會比地球還重。（參考數據：$\log 5.976 = 0.7764$）

6. 一模型公司在一個內部邊長為 2 單位的透明正立方體箱子內，放置一顆半徑為 1 單位的大球，然後又要在箱子的八個角落再塞入 8 顆半徑相同的小球。問：小球的最大半徑為 ___(6)___ 單位。



7. 求值

$$\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \underline{\quad(7)\quad}$$

（將答案化為最簡形式）

8. 尤拉在 1742 年時，將白努利所舉的四次多項式 $f(x)$ 分解為二次多項式

$$x^2-\left(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)$$

與二次多項式

$$x^2-\left(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1-\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)$$

的乘積。白努利所舉的多項式 $f(x) =$ ___(8)___（以降次排列表示）。

貳、計算證明題（共計 44 分）：

一、（13 分）求 $\cot\frac{\pi}{24}$ 的值。（必須化為最簡單的形式）

二、（18 分）

(1) 證明：對每個大於 1 的整數 n，恆有

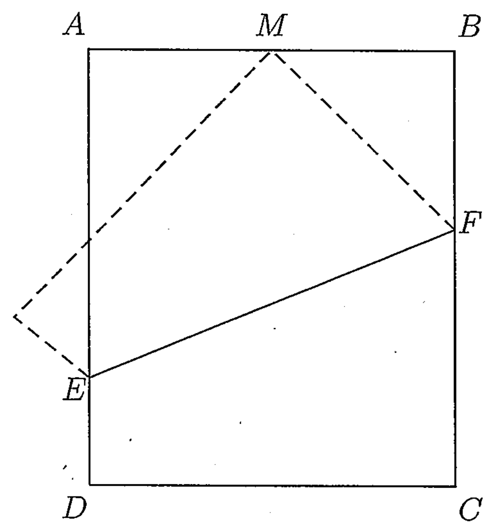
$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\cdots\sqrt{n}}}}} < \frac{3}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}}.$$

請注意：上式右端的分母是 $n+2$ 的正 2^{n-1} 次方根。

(2) 試證：對每個大於 1 的整數 n，恆有

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\cdots\sqrt{n}}}}} < 3.$$

三、（13 分）將長 $\overline{AB}=240$，寬 $\overline{BC}=288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在線段 $\overline{AB}$ 的中點 M 上，如下圖所示：



已知 $\overline{EF}$ 是摺線，求摺線 $\overline{EF}$ 的長度。

台北市華江高中 100 學年度教師甄選參考答案

填充題參考答案

(1) $540°$

(2) 204

(3) 6

(4) 5 或 9

(5) 159

(6) $2-\sqrt{3}$

(7) $5+3\sqrt{2}$

(8) $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$