桃園市立武陵高級中等學校 111 學年度第一學期第 1 次正式教師甄選

數學科初試試題卷　　甄選證號：________(請自行填寫)　（計算證明題是記憶版）

※應試說明：1. 請將答案填寫至答案卷。2. 試題卷請於交卷時繳回，<u>禁止攜出試場</u>。

一、填充題 A (每題 6 %，共 36 分)

1. $a>1$，曲線 $y=\left|\dfrac{x^2}{2}-1\right|$，與圓 $x^2+(y-a)^2=r^2$ 恰好交於 3 點，求 $a=$______。

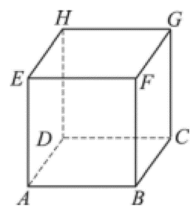
2. $a, b, c, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x, y, z$ 皆為實數，且
$\left(\begin{vmatrix} a & b \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b & c \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c & a \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}\right)=(1,2,3)$　，　$\left(\begin{vmatrix} a & b \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b & c \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c & a \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\right)=(4,5,6)$。
若 x, y, z 滿足 $ax+by+cz=0$，求 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z$ 之最小值______。

3. 0~9 共 10 個數字，任取 n 個數字排列(可重複)，請問包含偶數個 9(含沒有 9)的排列有______種。

4. 甲乙兩人比賽桌球，約定比賽進行到有一人比另一人多贏 2 局，或者打滿 6 局時比賽結束。
設甲在每局中獲勝的機率均為 $\dfrac{3}{4}$，且各局勝負互不影響。則比賽結束時，已賽局數 X 的期望值 $E(X)=$______。

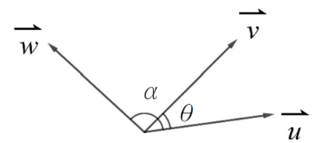
5. $\omega^{503}=1$，$\omega\neq 1$，求 $\dfrac{\omega^2}{\omega-1}+\dfrac{\omega^4}{\omega^2-1}+\dfrac{\omega^6}{\omega^3-1}+\cdots+\dfrac{\omega^{1004}}{\omega^{502}-1}=$______。

6. 有一個大正立方體由 27 個單位正立方體堆疊組成，今有一平面垂直平分大正立方體之內部對角線 $\overline{AG}$，則該平面會與______個單位正立方體相交。



二、填充題 B (每題 8 %，共 32 分)

7. 如圖，$\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ，$\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 的夾角為 α，且 $\left|\overrightarrow{u}\right|=\left|\overrightarrow{v}\right|=\left|\overrightarrow{w}\right|$，若
$\overrightarrow{w}=f(\theta,\alpha)\,\overrightarrow{u}+g(\theta,\alpha)\,\overrightarrow{v}$，試求 $f(\theta,\alpha)+g(\theta,\alpha)=$______。



8. 拋物線 $\Gamma_1: y=x^2-2x+2$ 與 $\Gamma_2: y=-x^2+ax+b$，其中一個交點在兩拋物線所作的切線互相垂直，且 $a,b>0$。求 ab 的最大值______。

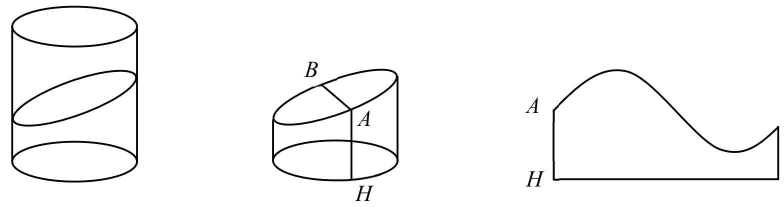
9. 將方程式 $y^4-2xy^2+2x^2-4=0$ 圖形所圍成的封閉區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為______。

10. 已知正數 $a,\ b,\ c$ 滿足 $5c-3a\le b\le 4c-a$ ，$c\ln b\ge a+c\ln c$ ，求 $\dfrac{b}{a}$ 的範圍：______。(以區間記號表達)

三、計算證明題 (共 32 分)

1. 設 $x,\ y\in\mathbb{R}$ ，試求 $24x^4+y^2-8x^2y-40x^2-2y$ 的最小值。 (10 %)

2. 如圖，將一張長方形紙捲成直圓柱，且底面是半徑為 4 的圓。今以一平面截此圓柱，得一截痕為橢圓，其長軸長為 10，且短軸為 $\overline{AB}$ 。將圓柱沿著鉛直線 $\overline{AH}$ 剪開之後，以直線 AH 為 y 軸，A 為原點，右側方向為 x 軸正向 (坐標軸刻度單位即為題目敘述中的長度單位)，求波浪狀吻合的函數 $f(x)$ 。 (10 %)



3. 已知實數數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，且方程式 $x^2-a_nx-a_n=0$ 有一根為 S_n-1 。 (12 %)

(1) 試求 $a_1,\ a_2$ 之值。

(2) 求 a_n 的一般項。