國 立 嘉 義 高 級 中 學 111 學 年 度 第 1 次 教 師 甄 選－數 學 科 **試 題**

填充題：共 20 題，每題 5 分，合計 100 分

1. 觀察2的次方所形成的等比數列$\langle 2 , 2^2 , 2^3 , 2^4 , \cdots \rangle$，若$2^n$是13位數，則自然數$n$的所有可能值是________

2. 計算 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+39^2-40^2+41^2=$________

3. $n\in\mathbb{Z}$，$n+11$為7的倍數、$n+7$為11的倍數，則n之通解為________

4. 朋友間往來書信，已知信在途中遺失的機率為 0.2，沒回信的機率為 0.4，今甲寄出一封信給乙，在已知甲沒收到回信的條件下，則乙有收到甲寄的信之機率為________

5. 在坐標平面上，已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(1,m)$ ，$\overrightarrow{b}=(n,2)$ 在直線 $L:x+2y+3=0$ 上的正射影相同，則兩向量長度平方 $|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$ 的最小值為________

6. 已知包含兩相交直線 $L_1:\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ 與 $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-a}{-2}$ 的平面方程式為 $x+by+cz=d$ ，求實數數對 (a,b,c,d) 為________

7. 設$P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其中$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$，若$\det(P)=-2$且$P^{-1}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$，則$P=$________

8. 已知ΔABC的三邊長分別為$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$，今給定一線性變換 $T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，若$\Delta ABC$經 T線性變換後成 $\Delta A'B'C'$，求$\Delta A'B'C'$ 的面積為________

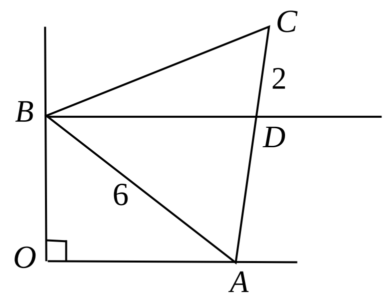
9. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為「格子點」。設 n 為正整數，已知在第一象限且滿足 $x+2y\le 4n$ 的格子點(x, y)的數目為 a_n。則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 的值為__________

10. 設二次曲線$\Gamma: 9x^2+16y^2-18x-64y-71=0$與直線$L: 2x-5y-10=0$，若要在$\Gamma$上找一點$P$使得$P$到$L$的距離最短，則$P$的坐標為_________

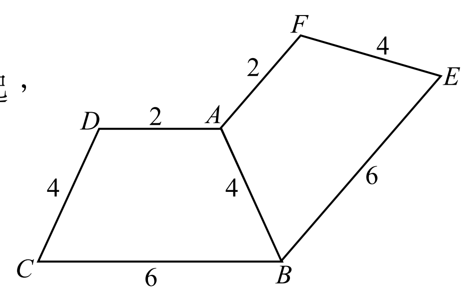
11. a, b, c, d, e, f, g七個字母排成一列，a, b不相鄰且c, d, e任二字母不相鄰，則其排列方法有_________種。

12. 設 $ABCD$ 為梯形，其中 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{CD}=\overline{AD}=2$ 、 $\angle C=60°$ ， P 為 $\overline{CD}$ 上一點，直線 AP 與邊 $\overline{BC}$ 之延長線相交於 Q 點，則 ΔADP 與 ΔCQP 面積和之最小值為___________。

13. 如右圖，有一正 ΔABC 的藝術品，邊長為 6 公尺，以 $\overline{AB}$ 為邊斜靠在牆壁上，牆角為 O 點，形成一個直角 ΔOAB ， $\angle AOB=90°$，A 點在地面上，B 點在牆上，過 B 點作與地面平行之直線交 $\overline{AC}$ 於點 D ，已知 $\overline{CD}=2$ 公尺，試求此藝術品的最高點離地面_________公尺。



14. 如右圖為兩個全等的等腰梯形 $ABCD$ 及 $ABEF$，將等腰梯形 $ABEF$ 沿直線 AB 摺起，摺至平面 $ABEF$ 與平面 $ABCD$ 垂直，則此時的 $\overline{DE}$ 長度為__________



15. 空間直角坐標系中有一三角柱，其五個面所在之平面方程式分別為$E_1: x+y+z=2$、 $E_2: x+y+z=11$、$E_3: x-2y+z=3$、$E_4: x-z=5$、$E_5: x-y=2$，則此三角柱的體積為__________

16. 設函數 $f(x)=x^2-x$ 的圖形為 Γ ，且 $Q(2,1)$ 為 Γ 外一點，已知過 Q 點有兩條直線與 Γ 相切，求 Γ 與這兩條直線所圍成的區域面積為___________

17. 對於二次曲線，下列敘述何者正確？(全對才給分)___________

(1)一動圓與直線 $L: x=-4$ 相切且與圓 C： $x^2+y^2-6x+5=0$ 外切，則此動圓圓心軌跡方程式為一拋物線

(2)一動圓過定點 $A\,(0,4)$與圓 C： $x^2+(y+2)^2=4$ 相切，則此動圓圓心軌跡為一橢圓

(3)一動圓過定過 $A\,(0,4)$與圓 C： $x^2+y^2=25$ 相切，則此動圓圓心軌跡為一雙曲線

(4)若一雙曲線之一支恰與一拋物線共頂點且共焦點，則此雙曲線的正焦弦長，必大於此拋物線的正焦弦長

(5)與圓 $C_1: x^2+(y-2)^2=1$ 外切且與圓 $C_2: x^2+y^2=49$ 內切之動圓 C 的圓心軌跡為一橢圓

18. 若數列$\langle a_k\rangle_{k=1}^{\infty}$滿足$a_1=1$、$a_2=2$且$a_{n+2}\cdot a_n+6a_{n+2}\cdot a_{n+1}=a_{n+1}\cdot a_n$，其中$n\in\mathbb{N}$，則$a_n=$_________ (以$n$表示)

19. $x,y\in\mathbb{R}$，則$\begin{cases}\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2\\ \sqrt{y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=\sqrt{2}\end{cases}$ 之解(x,y)為__________

20. 若$0<p<1$，則$\sum_{n=1}^{\infty}n^3(1-p)^{n-1}p=$_________(以$p$表示)