國立新竹女子高級中學 111 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選　數學科試題卷
公告版

一、　填充題（每格 5 分，共 70 分）

1. 下圖的積木為索碼立方體中的其中一塊元件，它是由四塊小正方體組成。假設小正方體的邊長為 1，則將這個元件平穩地置於桌面上時，它所有可能高度的最大值為＿＿＿＿＿。（下面示意圖的高度為 2）

2. 令二階方陣 $E_k=\begin{bmatrix}\cos k^\circ & \sin k^\circ \\ \sin k^\circ & -\cos k^\circ\end{bmatrix}$，則 2022 個方陣的乘積 $E_1E_2E_3\ldots E_{2022}=$＿＿＿＿＿。

3. 在 C_0^{2022} 、C_1^{2022} 、C_2^{2022} 、…、C_{2022}^{2022} 這 2023 個數之中，有＿＿＿＿＿個數是 3 的倍數。

4. 五邊形 $ABCDE$，在頂點 A 有一隻青蛙，每次青蛙會隨機往一個相鄰的頂點跳躍（也就是跳往相鄰頂點的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ），當再跳到 A 的時候即停止跳動。則該青蛙跳躍次數的期望值為＿＿＿＿＿。

5. 已知平面上三點 $A(8, 9)$、$B(40, 136)$、$C(103, 90)$，則在 $\triangle ABC$ 內部（不包含邊界）有＿＿＿＿＿個格子點。

6. 在凸四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\angle DAC=12^\circ$、$\angle CAB=36^\circ$、$\angle ABD=48^\circ$、$\angle DBC=24^\circ$，則 $\angle BDC=$＿＿＿＿＿。

7. 平面上的點 $P(x,y)$ 滿足

(i) $x^2 \le 1$；

(ii) 從 P 點可向 $y=2x^3+6x^2-1$ 的圖形作出三條相異切線，

則滿足上述條件之 P 點所形成的區域面積為__________。

8. 在下圖 3×3 方格表中，每一個方格均被塗上藍、黃、紅、黑四種顏色之一，相鄰方格不同色，若該方格表中恰有兩格塗上藍色，且藍色不可塗在中間及角落方格上（標號奇數的位置），則符合條件的著色方法有___________種。

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

9. 有一台電腦每秒以相同的機率輸出一個數字 1 或 -1，若令 p_n 為輸出的前 n 個數字和為 3 的倍數之機率，則 p_n 的一般式為__________。（以 n 表示）

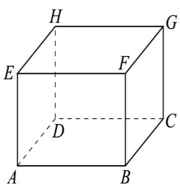
10. 已知 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，且 $4\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=-5\overrightarrow{IA}$，設 R，r 分別為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑與內切圓半徑，若 $r=15$，則 R 之值為__________。

11. 已知拋物線 Γ ： $y^2=x$ 與圓 C ： $(x-4)^2+y^2=r^2$（$r>0$）相交於 P 、Q 、R 、S 四點。則

(1) r 的範圍為__________

(2) 四邊形 $PQRS$ 面積為最大時，兩對角線 PR 、QS 的交點坐標為__________。

12. 在正方體 $ABCD$-$EFGH$ 中，M 為 $\overline{GH}$ 中點，平面 AFM 將正方體分割成體積為 V_1 、V_2 的兩部分(其中 $V_1 \le V_2$)，則 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 的值為__________。



13. 河內塔（Tower of Hanoi）是根據一個傳說形成的數學問題：

有三根杆子 A，B，C。A 杆上有 6 個穿孔圓盤，圓盤的尺寸由上到下依次變大。要求按下列規則將所有圓盤移至 C 杆：

(i) 每次只能移動一個圓盤；

(ii) 大圓盤不能疊在小圓盤上面。

此問題當「初始盤面為 6 個圓盤皆放在 A 杆上」時，最少步數為 63 步，我們將 63 步稱為該初始盤面的最佳解。若重新規定 6 個圓盤不一定都要放在 A 杆上，只要符合「大圓盤的下方都沒有較小的圓盤」，都是可行的初始盤面。則在這些初始盤面中，有__________種盤面的最佳解是 63 步。

二、 計算證明題（每題 10 分，共 30 分。需詳列推導、證明過程，否則不予計分）

3.在正十邊形中，連接其中七條對角線，使其分割成八個互不重疊的三角形，這種分割方式我們將其稱之為**正十邊形的三角化**。請問在正十邊形中，有幾種三角化的方式，會使得分割出來的八個三角形中恰有一個銳角三角形。

一、填充題答案

1. $\frac{4}{\sqrt{3}}$	**2.** $\begin{bmatrix}\cos 69^\circ & -\sin 69^\circ \\ \sin 69^\circ & \cos 69^\circ\end{bmatrix}$	**3.** 1780	**4.** 5
5. 4736	**6.** 54°	**7.** 8	**8.** 1248
9. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	**10.** 32	**11.(1)** $\frac{\sqrt{15}}{2}<r<4$	**(2)** $\left(\frac{7}{6},0\right)$
12. $\frac{7}{17}$	**13.** 64		

二、計算證明題

3.答案:450