$5c - 3a \leq b \leq 4c - a$

$\dfrac{5c}{a} - 3 \leq \dfrac{b}{a} \leq \dfrac{4c}{a} - 1 \quad \cdots(1)$

$\begin{cases} 5c - 3a \leq 4c - a \\ 0 < b \leq 4c - a \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{c}{a} \leq 2 \quad \cdots(2)$

$c \ln b \geq a + c \ln c \Rightarrow a \leq c \ln\left(\dfrac{b}{c}\right) \quad \cdots(3)$

由 $(1),(2)$ $\quad \dfrac{b}{a} \leq 4 \times 2 - 1 = 7$

等號成立於 $b = 7a, c = 2a$ 代入 (3)，成立

由 (3) $\quad \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{c \ln\left(\dfrac{b}{c}\right)} \Rightarrow \dfrac{b}{a} \geq \dfrac{b}{c \ln\left(\dfrac{b}{c}\right)} = \dfrac{\dfrac{b}{c}}{\ln\left(\dfrac{b}{c}\right)}$

考慮函數 $f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \quad (x > 1)$

微分可知 $x = e$ 時，$f(x)$ 有最小值 e

故 $\dfrac{b}{a} \geq e$，等號成立於 $b = ea = ec, a = c$ 代入 (1)，成立

所求為 $e \leq \dfrac{b}{a} \leq 7$