7.若 $n=1+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+50\cdot 50!$，則 n 除以 50 的餘數為何？【100.全國高中聯招　★★☆餘數問題】(A)23　(B)23　(C)29　(D)49

【解】：(D)

$\because n\cdot n!=(n+1)!-n!$

$\therefore n=1+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+50\cdot 50!=1+(3!-2!)+(4!-5!)+....+(51!-50!)=51!-1$

故可知 $n\equiv -1(\bmod 50)$

則 n 除以 50 的餘數為 49

11. $x^{20}+1$ 除以 $(x^2+1)(x^4-4)$ 的餘式為______。【100.全國高中聯招　★☆☆因餘式定理】

【解】：

令 $f(x)=x^{20}+1$、$g(x)=x^{10}+1$，則 $f(x)=g(x^2)$

則 $g(x)=(x+1)(x^2-4)Q(x)+ax^2+bx+c=(x+1)(x+2)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

由餘式定理可知

$$\begin{cases} g(-1)=2\Rightarrow a-b+c=2 \\ g(2)=2^{10}+1\Rightarrow 4a+2b+c=1025 \\ g(-2)=(-2)^{10}+1\Rightarrow 4a-2b+c=1025 \end{cases} \Rightarrow a=341, b=0, c=-339$$

故可知 $g(x)=(x+1)(x^2-4)Q(x)+341x^2-339$

$\therefore f(x)=g(x^2)=(x^2+1)(x^4-4)Q(x^2)+341x^4-339$

故所求餘式為 $341x^4-339$