臺中市立臺中第一高級中等學校 111 學年度第 1 次教師甄選 數學科 試題卷

一、填充題(甲)(每題 4 分，共 24 分。)

1. 當 $x>0$ 時，令 $[x]$ 表示 x 的整數部分，$\{x\}$ 表示 x 的小數部分，如 $[20.22]=20$ 且 $\{20.22\}=0.22$ 。

   求最小正數 x 使得 $[x]\cdot\{x\}\geq 3$，則 $x=$____________。

2. 設 P 為正 ΔABC 內部一點，若 P 點依序到三邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 之距離比為 $1:3:2$ ，則 $\overline{PA}^2:\overline{PB}^2:\overline{PC}^2$ 為________。

3. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，首項 $a_1=\dfrac{1}{4}$ ，且滿足 $a_n+3S_nS_{n-1}=0$（ $n\geq 2, n\in N$ ），則 $\dfrac{1}{S_{2022}}=$__________。

4. ΔABC 為直角三角形，其中 $\angle C=90°$， $\overline{AC}=16$，$\overline{BC}=5$，以 C 為圓心，半徑為 4 作一個圓 Γ ，若 D 為圓 Γ 上一個動點，則 $\dfrac{1}{4}\overline{AD}+\overline{BD}$ 的最小值為________。

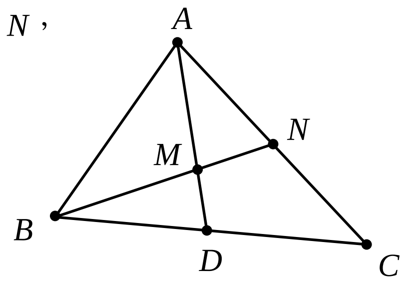
5. 定義在 R 上的函數 $f(x)$ ，對任意的實數 x 均滿足 $f(x+3)\leq f(x)+3$，$f(x+2)\geq f(x)+2$ ，且 $f(1)=3$ ，
   則 $f(2022)$ 的值為_______。

6. 求 $\int x^2\ln x\,dx=$________。

二、填充題(乙)(每題 6 分，共 54 分。)

1. 設 $A_1 A_2 \cdots A_{111}$ 為一單位圓的內接正 111 邊形，且 P 為此單位圓上任一點。試求 $\overline{PA_1} \times \overline{PA_2} \times \cdots \times \overline{PA_{111}}$ 的最大值為 ______。

2. 如右圖(一)，ΔABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 中點，M 為 $\overline{AD}$ 上的任一點。直線 $\overleftrightarrow{BM}$ 交 $\overline{AC}$ 於 N，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 是 ΔNBC 外接圓的切線。若 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BN}} = \dfrac{5}{4}$，求 $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{MN}} =$ ______。



圖(一)

3. 已知 $A_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k \cdot 2^k}{(k+1)\cdot(k+2)}$，$B_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k$，$n \in N$，求滿足 $\left|(n+2)A_n - B_n\right| > 2022$ 之最小自然數 $n =$ ______。

4. 設一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} > a_n$ ($n \in N$) 且 $(a_{n+1})^2 + (a_n)^2 + 1 = 2(a_{n+1} \cdot a_n + a_{n+1} + a_n)$。令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，試求 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n a_n} =$ ______。

5. 已知實數 $x > 0$ 且 y、z 均為實數，求聯立方程式 $\begin{cases} 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 12\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 13\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$ 的解 (x, y, z) 為 ______。

6. 將一個半徑 1 的小球，放入一個稜長為 $4\sqrt{6}$ 的正四面體容器內，小球可在容器內自由移動，則小球永遠不可能接觸到的容器內壁面積為 ______。

7. 設 $a>0, b>0, c>0$，求 $\dfrac{a+3c}{a+2b+c}+\dfrac{4b}{a+b+2c}-\dfrac{8c}{a+b+3c}+17$ 的最小值為________。

8. xy 平面上有一質點可任意運動，其在 x 軸上的運動速度為 2 公尺/秒，不在 x 軸上的運動速度為 1 公尺/秒。試求該質點從原點出發在 1 秒內可能到達區域所圍成的面積為____________。

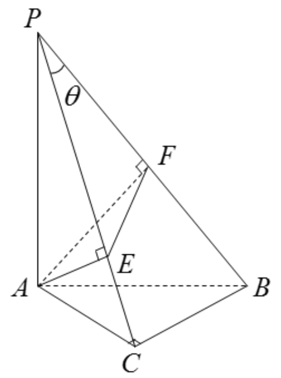
9. 從正整數 1～2022 中任取 n 個數($n \geq 2$)，此 n 個數中兩兩互質且至少有一個質數(如 $n=3$ 時，可找到 1,4,9 滿足兩兩互質，但 1,4,9 均不為質數)，則滿足此條件之 n 的最小值為__________。

三、計算與證明題 (**請先標示題號，再詳列計算/證明過程，未有過程僅有答案者不給分。**共 22 分。)

1. 如右圖，在三角錐 $P\text{-}ABC$ 中，$\overline{PA}$ 垂直底面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，$\overline{AF}\perp\overline{PB}$、$\overline{AE}\perp\overline{PC}$。

若 $\overline{PA}=\overline{AB}=2$、$\angle BPC=\theta$，則

(1) 求 ΔAEF 的最大面積為何？(5 分)　(2) 承(1)，此時 $\tan\theta$ 的值為何？(5 分)



2. 已知拋物線 $y^2=6x$ 上有兩個動點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1+x_2=4$。若 $\overline{AB}$ 的垂直平分線交 x 軸於 C 點，試回答下列問題：

(1) C 點坐標為何？(2 分)　(2) 設 $M(x_0,y_0)$ 為 $\overline{AB}$ 的中點，則 y_0 的範圍為何？(4 分)

(3) 求 ΔABC 面積的最大值為何？(6 分)