

國立鳳山高中 100 學年度教師甄試數學科試題卷

- 設 $A、B、C、D$ 表 $z^4 - z^2 + 1 = 0$ 之四根在複數平面上的對應點，又 P 表複數 i 在複數平面上的對應點，則 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PD} = ?$ (8 分)
- 袋中有 $1, 2, \dots, 9$ 號球各一個，每次自袋中取出一球，取後放回，共取 n 次， n 次和為偶數的機率記為 P_n ，求(1) P_{n+1} 及 P_n 之關係式? (6 分)
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = ?$ (6 分)
- 利用最小平方法得到二維數據 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, y 對 x 的迴歸直線為 $y = a + bx$ ，另一組二維數據 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ 是透過 $u = c + dx$ ， $v = e + fy$ 所得到，已知 a, b, c, d, e, f 為定值，求 v 對 u 的迴歸直線方程式? (8 分)
- 已知拋物線 $y^2 = mx$ ($m > 0$)，與圓 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 在第一象限交於相異兩點 $A、B$ ，且 \overline{AB} 的中點 P 恰好落在直線 $y = x$ 上，求 m 值? (8 分)
- 四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形， \overline{AC} 為直徑，且 $\overline{AC} = 2$ ，又 $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$ ，則 \overline{BD} 長為? (8 分)
- 二函數 $f(x)$ ， $g(y)$ 均為可微分函數且滿足：對所有 $x, y \in R$ ， $f(x+2y) = f(x) + g(y)$ ，若 $f(0) = 1$ ， $f'(0) = 2$ ，求 $g(10)$ 。(8 分)
- 求方程式

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}} = y$$
 x, y 的非負整數解，其中共有 2011 個 $\sqrt{\quad}$ ，且 $\sqrt{\quad}$ 指正根而言。(8 分)
- 四面體邊長分別為 $1, 1, 1, 1, a, b$ (其中 a, b 為歪斜線段長)，試求四面體體積最大值。(8 分)
- 設有一函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^x f(t) dt = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax + b$ ，自點 $P(1,1)$ 作曲線 $y = f(x)$ 的二切線互相垂直，求 $a、b$ 值? (8 分)
- 三正數 a, b, c ，且 $a + b + c = 3$ ，試求 $\log_4\left(\frac{3}{a} - 1\right) + \log_4\left(\frac{3}{b} - 1\right) + \log_4\left(\frac{3}{c} - 1\right)$ 的最小值(8 分)
- 已知 a, b, c 為三相異有理數，試證： $\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}$ 為完全平方數(8 分)
- 整係數多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，若 $p(0)$ 和 $p(1)$ 的值均為奇數，證明： $p(x) = 0$ 沒有整數解(8 分)