

# 110 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

## 第 5 區(屏東高中)

### 口試(一)

設  $P(x)$  是一個實數係數多項式，且

$W(x) = (x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$  是一個常數多項式。

試求出所有滿足條件的多項式  $P(x)$ 。

#### [參考解答]

令  $W(x) = (x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$

將  $x = -1$  帶入  $W(x)$ ， $W(-1) = 2P(-1)$ ，

將  $x = 1$  帶入  $W(x)$ ， $W(1) = 2P(0)$ ，

因為  $W(x)$  為常數，所以， $P(-1) = P(0)$ 。

令  $c = P(-1) = P(0)$  (常數)

令  $Q(x) = P(x) - c$ ，則  $0, -1$  是  $Q(x)$  的根，

$Q(x)$  可以表示成  $Q(x) = x(x + 1)R(x)$ ，其中  $R(x)$  是實數係數多項式。

$P(x) = Q(x) + c = x(x + 1)R(x) + c$  帶入  $W(x)$  得

$$(x + 1)((x - 1)xR(x - 1) + c) - (x - 1)(x(x + 1)R(x) + c)$$

化簡表示為

$$x(x - 1)(x + 1)(R(x - 1) - R(x)) + 2c$$

因為  $W(x)$  為常數，所以  $x(x - 1)(x + 1)(R(x - 1) - R(x))$  也是常數

$$R(x - 1) - R(x) = 0$$

所以， $R(x)$  為常數，設為  $k$ 。

$$Q(x) = kx(x + 1)$$

$$P(x) = Q(x) + c = kx(x + 1) + c$$

所以， $P(x) = kx^2 + kx + c$  ( $k \neq 0$ , 二次多項式)，或  $c$  ( $k=0$ , 常數多項式)。

110 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題  
第 5 區(屏東高中)

口試(二)

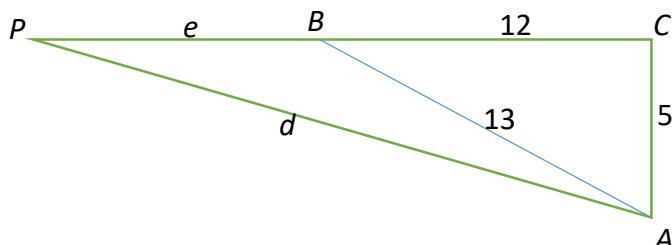
已知  $\triangle ABC$  為直角三角形，其中  $\overline{AB} = 13$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 12$ 。

一個質點  $P$  沿著  $\overrightarrow{CB}$  作直線運動。

設  $\overline{PB} = e$ 、 $\overline{PA} = d$ ，試問當  $e$  值愈來愈大時， $(d - e)$  值的變化為何？

[參考解答]  $(d - e)$  值將趨近於 12

如右圖， $d^2 = (e + 12)^2 + 5^2$  得



$$d = \sqrt{e^2 + 24e + 169}$$

$$\Rightarrow d - e = \sqrt{e^2 + 24e + 169} - e$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^2 + 24e + 169 - e^2}{\sqrt{e^2 + 24e + 169} + e} \\ &= \frac{24 + \frac{169}{e}}{\sqrt{1 + \frac{24}{e} + \frac{169}{e^2}} + 1} \end{aligned}$$

由上式可知，當  $e$  值愈來愈大時， $\frac{24}{e}$ 、 $\frac{169}{e}$  與  $\frac{169}{e^2}$  值會愈來愈小，所以可推得  $(d - e)$  值將會趨近於 12.