110 學年度台灣省北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：______________________ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 已知

$$\log_3 \log_4 \log_2 x = \log_4 \log_2 \log_3 y = \log_2 \log_3 \log_4 z = 0,$$

則 $2x+3y+4z$ 的值為 ___(一)___。

2. 在三角形 ABC 的 AB 邊上有一點 D 滿足 $\overline{AD}:\overline{DB}=2:3$，且 $\angle BCD = 2\angle DCA$。由點 A 向直線 CD 引垂線，設垂足為 E。則 $\overline{CE}:\overline{BC}=$ ___(二)___。

3. 設實數 x,y 滿足

$$\begin{cases} 2y-5 \leqslant 0 \\ 11x-8y-13 \leqslant 0 \\ 11x+4y-21 \geqslant 0, \end{cases}$$

則 $\dfrac{y}{x}$ 的範圍為 ___(三)___。

(背面尚有試題)

4. 設 $[x]$ 表示不大於實數 x 的最大整數，則滿足此方程式

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=69$$

的所有正整數 n 之和為___(四)___。

5. 甲乙兩人舉行五戰三勝的比賽(任一人先勝三局比賽就結束)。每一局比賽必有勝負，其中甲勝的機率為2/3，乙勝的機率為1/3。問比賽結束時，乙獲勝場次的期望值為___(五)___。

6. 令 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$。已知 $N=\dfrac{\alpha^9-100}{\alpha^3-4}$ 為正整數，則 N 之值為___(六)___。

7. 對正整數 n 來說，如果 $(7x+1)^n$ 展開集項整理後至少有兩項的係數相同，則這樣的 n 稱為<u>奇妙的</u> n。最小的30個奇妙的 n 的總和是___(七)___。

(試題結束)

110學年度台灣省北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試二參考答案)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

答　　案　　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
315	4 : 3	$\frac{2}{5} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \frac{5}{2}$	55
(五)	**(六)**	**(七)**	
$\frac{107}{81}$	233	3690	

110學年度台灣省北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試二參考答案)

【問題一】已知

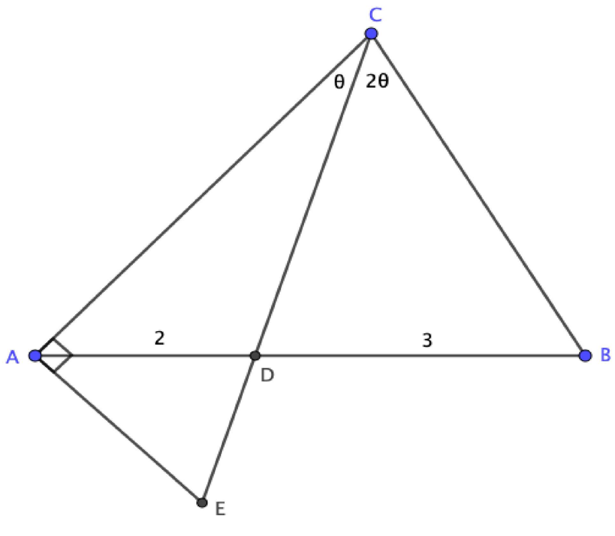
$$\log_3 \log_4 \log_2 x = \log_4 \log_2 \log_3 y = \log_2 \log_3 \log_4 z = 0,$$

則 $2x+3y+4z$ 的值為 ____(一)____。

【解】 $(x,y,z) = (2^4, 3^2, 4^3)$, $2x+3y+4z = 315$. □

【問題二】在三角形 ABC 的 AB 邊上有一點 D 滿足 $\overline{AD}:\overline{DB} = 2:3$，且 $\angle BCD = 2\angle DCA$。由點 A 向直線 CD 引垂線，設垂足為 E。則 $\overline{CE}:\overline{BC} =$ ____(二)____。

【解】 $4:3$。



記 $\angle DCA = \theta$，則 $\angle BCD = 2\theta$。由面積的比例性質及面積公式可得

$$\frac{2}{3} = \frac{AD}{DB} = \frac{[\triangle DCA]}{[\triangle BCD]} = \frac{CA \cdot CD \sin\theta}{BC \cdot CD \sin 2\theta} = \frac{CA}{2BC\cos\theta}。$$

故 $CA = \frac{4}{3}BC\cos\theta$。在直角三角形 $\triangle ACE$ 中，$\angle A = 90^\circ$，所以

$$CE = \frac{CA}{\cos\theta} = \frac{4}{3}BC。$$

故所求為 $CE:BC = 4:3$。

□

【問題三】

設實數x,y滿足

$$\begin{cases} 2y-5\leqslant 0 \\ 11x-8y-13\leqslant 0 \\ 11x+4y-21\geqslant 0, \end{cases}$$

則 $\dfrac{y}{x}$ 的範圍為＿＿(三)＿＿。

【解】 $\dfrac{2}{5}\leqslant\dfrac{y}{x}\leqslant\dfrac{5}{2}$。

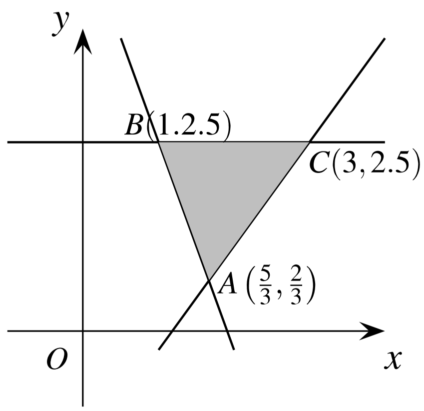
坐標平面上畫出圖形如右。

$\dfrac{y}{x}$ 表示過 $(0,0)$, (x,y) 的直線斜率。

由圖形可得出：$\dfrac{y}{x}$ 的最小值為

過點 O, A 的直線斜率：$\dfrac{2}{3}\div\dfrac{5}{3}=\dfrac{2}{5}$，

最大值為過點 O, B 的直線斜率：$\dfrac{5}{2}$。



□

【問題四】設 $[x]$ 表示不大於實數 x 的最大整數，則滿足此方程式

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=69$$

的所有正整數 n 之和為＿＿(四)＿＿。

【解】 因為 $x-1\leqslant[x]\leqslant x$，所以

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}-4<\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]\leqslant\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}$$

依題意可知

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}-4<69\leqslant\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}$$

故推得

$$\frac{77n}{60}-4<69\leqslant\frac{77n}{60}\quad\Leftrightarrow\quad 69\times\frac{60}{77}\leqslant n<73\times\frac{60}{77}\quad\Leftrightarrow\quad 53.76\leqslant n<56.88$$

因此可知 $n=54,55,56$ 為可能值。代入檢驗後，只有 $n=55$ 符合所求。 □

【問題六】令 $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$。已知 $N = \dfrac{\alpha^9 - 100}{\alpha^3 - 4}$ 為正整數，則 N 之值為 ___(六)___。

【解】 233。

α 滿足的二次方程式為 $\alpha^2 = -\alpha + 4$。所以 $\alpha^3 = -\alpha^2 + 4\alpha = 5\alpha - 4$。而

$$\begin{aligned}
\alpha^9 &= (\alpha^3)^3 = (5\alpha - 4)^3 \\
&= 125\alpha^3 - 300\alpha^2 + 240\alpha - 64 \\
&= 125(5\alpha - 4) - 300(-\alpha + 4) + 240\alpha - 64 \\
&= 1165\alpha - 1764。
\end{aligned}$$

故得 $N = \dfrac{\alpha^9 - 100}{\alpha^3 - 4} = \dfrac{1165\alpha - 1864}{5\alpha - 8} = 233$。 □

【問題七】對正整數 n 來說，如果 $(7x+1)^n$ 展開集項整理後至少有兩項的係數相同，則這樣的 n 稱為奇妙的 n。最小的 30 個奇妙的 n 的總和是 ___(七)___。

【解】 3690。

奇妙的 n 必為 $8k+7$ 的形式，$k = 0, 1, 2, \ldots$，且所有 $8k+7$ 都是奇妙的。故所求之和為等差級數

$$7 + 15 + \cdots + 239 = \frac{30(7+239)}{2} = 3690。$$

□