110 學年度台灣省北二區 (新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (一) 試題

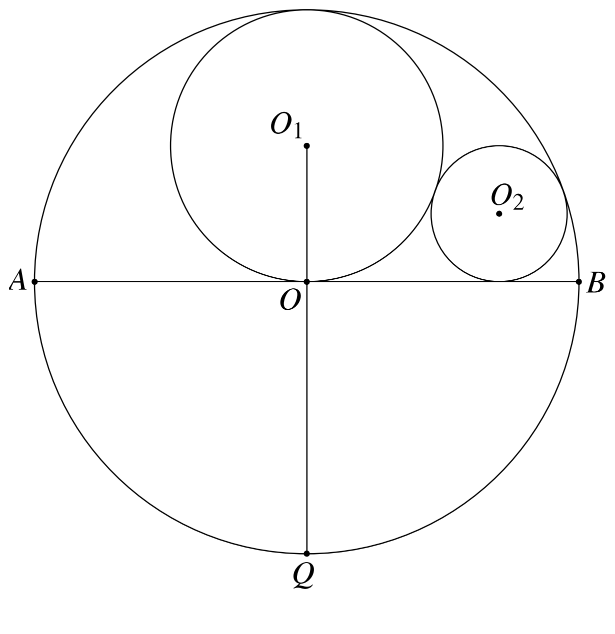
編號：______________________ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑。由 AB 截出的半圓內有兩個小圓 O_1, O_2 分別和直線 AB 相切、也同時內切於圓 O，且圓 O_1 與圓 O_2 相切，如圖所示。已知 O_1O 與 AB 垂直，射線 O_1O 與圓 O 交於點 Q。

1. 設圓 O 的半徑為 r，試求圓 O_2 的半徑。
2. 試證 Q 在圓 O_1, O_2 的內公切線上。



(16 分)

問題二： 令 $f(x)$ 為一個不可約的 5 次有理係數多項式，且 $g(x)=f(x^2+2021)$。假設有理係數多項式 $H(x)$ 為 $g(x)$ 的一個因式，且 $H(x)$ 的次數小於 $g(x)$ 的次數。

1. 試證明 $H(-x)$ 亦為 $g(x)$ 的因式。
2. 試證明 $H(x)$ 和 $H(-x)$ 互質。

(16 分)

問題三： 設正整數 n 的正因數個數為 a_n，且 n 的所有正因數之乘積為 b_n。

1. 試說明 $b_n^2=n^{a_n}$ 對每一正整數 $n\geqslant 2$ 都成立。
2. 定義函數

$$f(n)=\frac{\sqrt{a_n^3}}{\sqrt[a_n]{b_n}} \qquad (n=2,3,4,\cdots)，$$

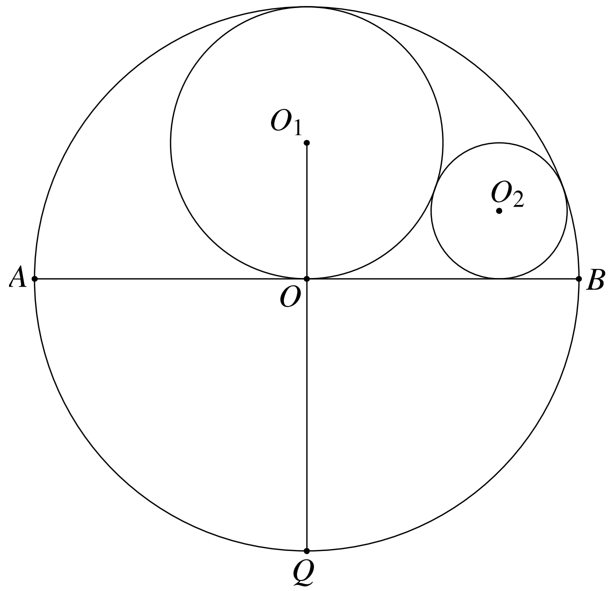
   試求函數 f 的最大值。

(17 分)

110學年度台灣省北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 設$\overline{AB}$為圓O的直徑。由AB截出的半圓內有兩個小圓O_1,O_2分別和直線AB相切、也同時內切於圓O，且圓O_1與圓O_2相切，如圖所示。已知O_1O與AB垂直，射線O_1O與圓O交於點Q。

1. 設圓O的半徑為r，試求圓O_2的半徑。
2. 試證Q在圓O_1,O_2的內公切線上。



(16 分)

【證】

(1) 設線段SQ為圓O的直徑，S為圓O,O_1的切點。易知O_1的半徑等於$r/2$。設H在OS上且$O_2H\perp OS$。由畢氏定理：

$$HO_2^2=O_1O_2^2-O_1H^2=(\frac{r}{2}+x)^2-(\frac{r}{2}-x)^2=2rx,$$
$$HO_2^2=OO_2^2-OH^2=(r-x)^2-x^2=r^2-2rx.$$

故$2rx=r^2-2rx$，即$x=\dfrac{r}{4}.$

(2) 設U為O_2對O的內切點，O,H_2分別為O_1,O_2對AB的切點。因為O_1與O位似(以S為位似中心)、O_2與O位似(以U為位似中心)，故直線SO與UH_2交於AB優弧的中點Q。

由畢氏定理知 $QB^2 = 2r^2 = QO \cdot QS$。另一方面，連 UB, QB。因為 $\angle H_2QB = \angle UQB$，且

$$\begin{aligned}\angle QBU &= \angle QBH_2 + \angle H_2BU = \frac{1}{2}(QA\text{弧} + AU\text{弧}) \\ &= \frac{1}{2}(QB\text{弧} + AU\text{弧}) = \angle BH_2Q.\end{aligned}$$

所以 $\triangle H_2BQ \sim \triangle BUQ$，可知

$$\frac{QH_2}{QB} = \frac{QB}{QU} \implies QH_2 \cdot QU = QB^2.$$

既然 Q 對 O_1, O_2 的圓冪相等：$QO \cdot QS = QB^2 = QH_2 \cdot QU$，所以 Q 位於圓 O_1, O_2 的根軸上，即 O_1, O_2 的內公切線上。證畢。 $\square$

問題二： 令 $f(x)$ 為一個不可約的 5 次有理係數多項式，且 $g(x)=f(x^2+2021)$。假設有理係數多項式 $H(x)$ 為 $g(x)$ 的一個因式，且 $H(x)$ 的次數小於 $g(x)$ 的次數。

1. 試證明 $H(-x)$ 亦為 $g(x)$ 的因式。
2. 試證明 $H(x)$ 和 $H(-x)$ 互質。

(16 分)

【證】 1. 由 $g(x)$ 的定義知 $g(-x)=f((-x)^2+2021)=f(x^2+2021)=g(x)$。另一方面，由給定的條件 $g(x)=H(x)Q(x)$，我們有

$$g(x)=g(-x)=H(-x)Q(-x)$$

這表示 $H(-x)$ 也是 $g(x)$ 的一個因式。

2-1. 若 $H(-x)=H(x)$，則

$$Q(-x)=g(-x)/H(-x)=g(x)/H(x)=Q(x)$$

這表示 $H(x)=h(x^2)$ 以及 $Q(x)=q(x^2)$，其中 $h(x)$ 和 $q(x)$ 為有理係數多項式。若 $H(x)$ 不是常數多項式則 $h(x)$ 與 $q(x)$ 也都不是常數多項式。考慮等式

$$f(x^2+2021)=g(x)=H(x)Q(x)=h(x^2)q(x^2)$$

令 $y=x^2$ 得 $f(y+2021)=h(y)q(y)$。由此得

$$f(y)=h(y-2021)q(y-2021)$$

這表示 $f(x)$ 為一個可約之多項式，與已知條件矛盾。因此，$H(x)$ 必為常數。

2-2. 令 $A(x)$ 為 $H(x)$ 和 $H(-x)$ 的最大公因式。則

$$H(x)=A(x)B(x) \quad 以及 \quad H(-x)=A(x)C(x)$$

其中 $B(x)$ 與 $C(x)$ 為有理系數多項式。以 $-x$ 代入上列等式知 $A(-x)$ 是 $H(x)$ 和 $H(-x)$ 的一個公因式，因此，$A(-x)$ 整除 $A(x)$。

另一方面，$A(x)$ 和 $A(-x)$ 有相同的次數，這表示 $A(-x)$ 也是 $H(x)$ 和 $H(-x)$ 的一個最大公因式。因此，$A(-x)=\varepsilon A(x)$，其中 ε 為常數，比較 $A(x)$ 和 $A(-x)$ 的首項係數可知 $\varepsilon=1$ 或 $\varepsilon=-1$。

若 $\varepsilon=-1$，則 $A(-x)=-A(x)$，因此 $A(0)=0$。但是，$A(x)$ 整除 $H(x)$ 以及 $H(x)$ 整除 $g(x)$，所以 $g(0)=0$。另一方面，

$$f(2021)=g(0)=0$$

這表示 2021 是 $f(x)$ 的有理根。這與 $f(x)$ 是不可約的有理係數多項式的條件矛盾，因此 $\varepsilon = 1$，亦即 $A(-x) = A(x)$。由 (b) 的結論可知 $A(x)$ 必為常數，也就是說，$H(x)$ 和 $H(-x)$ 互質。

$\square$

問題三： 設正整數 n 的正因數個數為 a_n，且 n 的所有正因數之乘積為 b_n。

1. 試說明 $b_n^2 = n^{a_n}$ 對每一正整數 $n \geqslant 2$ 都成立。
2. 定義函數

$$f(n) = \frac{\sqrt{a_n^3}}{\sqrt[a_n]{b_n}} \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots),$$

試求函數 f 的最大值。

(17 分)

【證】

1. 若 n 的正因數個數 $a_n = k$，且由小至大排列為 $c_1 = 1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_k = n$，則 $c_i \times c_{k-i+1} = n$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$；因此，

$$b_n^2 = (c_1 \times c_2 \times \cdots c_k)^2 = (c_1 \times c_k) \times (c_2 \times c_{k-1}) \times \cdots \times (c_k \times c_1)$$

$$= n \times n \times \cdots \times n = n^k = n^{a_n}。$$

2. 設 n 的質因數分解為 $n = p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times \cdots p_k^{r_k}$。我們有

$$a_n = (r_1+1)(r_2+1) \times \cdots \times (r_k+1) \text{ 且 } b_n^2 = n^{a_n},$$

因此，$f(n) = \dfrac{\sqrt{a_n^3}}{\sqrt[a_n]{b_n}} = \dfrac{\sqrt{a_n^3}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{(r_i+1)^3}{p_i^{r_i}}}$。

對每一質數 p，令 $g_p(r) = \dfrac{(r+1)^3}{p^r}$，則 $f(n) = \sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} g_{p_i}(r_i)}$。

欲求函數 f 的最大值，只要能求出對每一質數 p，函數 $g_p(r)$ 的最大值，就可達到 $f(n) = \sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} g_{p_i}(r_i)}$ 的最大值。

利用

$$1 < \frac{g_p(r+1)}{g_p(r)} = \left(\frac{r+2}{r+1}\right)^3 \cdot \frac{1}{p} \quad \Leftrightarrow \quad p < \left(\frac{r+2}{r+1}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{r+1}\right)^3,$$

其中 $\left(1 + \dfrac{1}{r+1}\right)^3$ 遞減到 1，亦即 p 有上界。又 $\displaystyle\max_{r \geqslant 0} \left(1 + \frac{1}{r+1}\right)^3 = 2^3 = 8$，因此，當 $p \geqslant 8$ 時，$g_p(r) > g_p(r+1)$，其中 $r \geqslant 0$；此時 $g_p(r)$ 的最大值都出現在 $r = 0$ 時，故 $\displaystyle\max_{r \geqslant 0} g_p(r) = g_p(0) = 1$。因此，只需考慮小於 8 的質數 p。

(1) 當 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \leqslant p < 8$ 時，$g_p(r) > g_p(r+1)$，其中 $r \geqslant 1$，且質數 $p \in \{5, 7\}$；此時 $g_p(r)$ 的最大值都出現在 $r = 1$ 時，故

$$\max_{r \geqslant 1} g_5(r) = g_5(1) = \frac{(1+1)^3}{5} = \frac{8}{5} \text{ 且 } \max_{r \geqslant 1} g_7(r) = g_7(1) = \frac{(1+1)^3}{7} = \frac{8}{7}。$$

(2) 當 $\left(\frac{4}{3}\right)^3 \leqslant p < \left(\frac{3}{2}\right)^3$ 時，$g_p(r) > g_p(r+1)$，其中 $r \geqslant 2$，且質數 $p = 3$；此時 $g_3(r)$ 的最大值出現在 $r = 2$ 時，故 $\max\limits_{r \geqslant 2} g_3(r) = g_3(2) = \frac{(2+1)^3}{3^2} = 3$。

(3) 當 $\left(\frac{5}{4}\right)^3 \leqslant p < \left(\frac{4}{3}\right)^3$ 時，$g_p(r) > g_p(r+1)$，其中 $r \geqslant 3$，且質數 $p = 2$；此時 $g_2(r)$ 的最大值出現在 $r = 3$ 時，故 $\max\limits_{r \geqslant 3} g_3(r) = g_2(3) = \frac{(3+1)^3}{2^3} = 8$。

綜合以上的討論，可得函數 f 的最大值為

$$\max_{n \geqslant 1} f(n) = \sqrt{g_2(3) \times g_3(2) \times g_5(1) \times g_7(1)} = \sqrt{8 \times 3 \times \frac{8}{5} \times \frac{8}{7}} = 16\sqrt{\frac{6}{35}} = \frac{16\sqrt{210}}{35}\text{，}$$

此最大值發生在 $n = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 2520$ 時。 $\square$