110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

筆試（一）試題卷

編號：________________（學生自填）

注意事項：

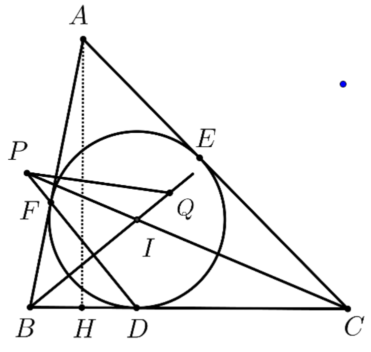
(1) 時間：2 小時（13:30～15:30）
(2) 配分：每題皆為 7 分
(3) 不可使用計算器
(4) 請將答案依序寫在答案卷內
(5) 學生自評預估得分(每題 0 ~7 分)

一、試求所有不小於 1 的實數 x, y, z，滿足

$$\min\left\{\sqrt{x+xyz},\ \sqrt{y+xyz},\ \sqrt{z+xyz}\right\}=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1},$$

其中 $\min\{p,q,r\}$ 表示 p,q,r 三數的最小值。

二、如圖，ΔABC 的內心為 I，其內切圓與 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的切點分別是 D, E, F。直線 $\overleftrightarrow{CI}, \overleftrightarrow{DF}$ 交於點 P，點 Q 在 $\overline{BI}$ 的延長線上，它與 B 在直線 $\overleftrightarrow{PC}$ 的相反兩側，且滿足 $\overline{PQ}+\overline{BC}=s$，其中 s 是 ΔABC 的半周長。令 $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於點 H。試證： (1) A, I, F, P 四點共圓； (2) P, Q, D, H 四點共圓。



三、設 $\langle a_n\rangle$ 及 $\langle b_n\rangle$ 為公比不相等的兩個等比數列，而 $c_n=\alpha a_n+\beta b_n$ 都不等於 0，其中 α, β 為非零實數。令 n 次多項式 $f_n(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$。已知對於正整數 $n\geq 2$，多項式 $f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)$ 除以 $xf_{n-1}(x)$ 的餘式皆為次數小於或等於 1 的多項式，試證：乘積 a_nb_n 是一與 n 無關的常數。

110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

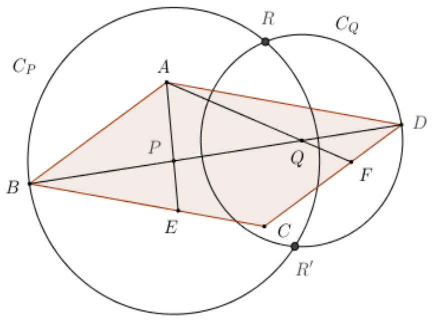
筆試（二）試題卷

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

(1) 時間：2 小時（16:00～18:00）
(2) 配分：每題皆為 7 分
(3) 不可使用計算器
(4) 請將答案依序寫在答案卷內
(5) 學生自評預估得分(每題 0 ~7 分)

一、在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E 在 $\overline{BC}$ 上，點 F 在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BD}$ 於點 P，$\overline{AF}$ 交 $\overline{BD}$ 於點 Q。設 C_P 是以 P 為圓心、$\overline{BP}$ 為半徑的圓，而 C_Q 是以 Q 為圓心、$\overline{QD}$ 為半徑的圓，且兩圓的交點為 R, R'。試證：$\overline{BE}\times\overline{DF}=\overline{CE}\times\overline{CF}$ 的充要條件為 $\angle BRD=120°$。



二、試問有多少組整數數對 (a,b)，滿足 $1\le a\le b\le 2021$，且 $\dfrac{ab^2+a+b}{a^2b+a+9}$ 為整數？

三、用 0 和 1 排成的 n 項數列中，滿足連續兩項為 0,0 的組數與連續兩項為 1,1 的組數相等之數列稱為「n 項的平衡數列」。例如：8 項數列 0,0,0,1,1,0,1,1 中，連續兩項為 0,0 的有 2 組，連續兩項為 1,1 的也有 2 組；因此，數列 0,0,0,1,1,0,1,1 為「8 項的平衡數列」。試問對任意的正整數 n，有多少種 n 項的平衡數列？

110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

口 試 試 題

注意事項：

(1) 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；
(2) 攜帶本試卷到口試教室應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；
(3) 口試完成後由助理引導至 M212 教室，繼續作答獨立研究。

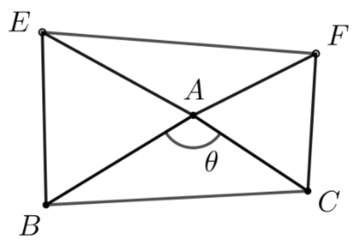
學生編號：______________

一、 設有 n 張牌，分別寫上 $1,2,3,\cdots,n$。對任意牌型 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，進行以下操作：若 a_n 為奇數，則將 a_n 置於最前面，即得新牌型 $a_n,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$；若 a_n 為偶數，則將 a_n 置於 a_1 與 a_2 之間，即得新牌型 $a_1,a_n,a_2,\cdots,a_{n-1}$。試證：當 a_1 為奇數時，經過連續操作多次後可回到原牌型，並求此最少的操作次數。

【解答】

二、 如圖，在 ΔABC 的邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的外側分別作兩正三角形 ΔABE 及 ΔACF。已知 $\overline{AC}=1$ 且 $\overline{EF}=2$。試求 ΔABC 面積的最大可能值。

【解答】



110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)
獨立研究（一）試題卷

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
(2) 時間：1.5 小時（8:30～10:00）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器
(5) 請將答案寫在答案卷內

學生編號：______________

一、設 D, E, F 分別是 ΔABC 三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上的點。試證：在 $\Delta AEF, \Delta BDF,$ ΔCDE 中，至少有一個三角形的面積不大於 ΔDEF 的面積。

二、將 $3,4,5,6,\cdots,1155$ 這 1153 個正整數重新排成一個數列 $\langle a_k \rangle$，使得對每一個 $k=1,2,3,\cdots,1153$，第 k 項 a_k 都是 k 的倍數。試問共有多少種不同的排法？

三、有一群人，人數至少 100 人，其中任意兩人或者彼此認識，或者彼此不認識。現在想將這群人分組（每一組至少一人，各組人數可以不相等）。如果每一組中的任意兩人都彼此不認識，稱為「好分組」。已知不管怎麼分，都無法分成 99 組的「好分組」，但是可以有分成 100 組的「好分組」。試證：在分成 100 組的「好分組」中，都可以在第 k 組中選出一個人 v_k，使得對每一個 $k=1,2,3,\cdots,99$，都有 v_k 認識 v_{k+1}。

110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)
獨立研究（二）試題卷

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
(2) 時間：1.5 小時（10:20～11:50）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器
(5) 請將答案寫在答案卷內

學生編號：______________

一、 試求滿足下列條件的最小正整數 n：當整係數多項式函數 $f(x)$ 有 n 個相異整數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，滿足 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 1$ 時，方程式 $f(x) = 3$ 就不會有整數解。

二、 試證：不存在任何的正整數解 (x, y, z, w)，滿足下列方程式：

$$4x^4 + 9y^4 = 11(z^4 + w^4)\text{ 。}$$

三、將邊長為 3 的正三角形分成九個全等的單位三角形。一開始每個單位三角形裡都填 0。每次操作可以選擇兩個相鄰的單位三角形（相鄰意為有共同邊）而將這兩個三角形內的數字都同時加 1 或同時減 1。已知經由若干次操作後，九個數恰好形成連續的正整數 $n, (n+1), \cdots, (n+8)$ ，試求所有可能的 n 值。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

試求所有不小於 1 的實數 x,y,z，滿足

$$\min\left\{\sqrt{x+xyz},\ \sqrt{y+xyz},\ \sqrt{z+xyz}\right\}=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\text{，}\qquad (1)$$

其中 $\min\{p,q,r\}$ 表示 p,q,r 三數的最小值。

解析		
類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)	
試題出處	■ 自編　□ 改編於：	
難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號：筆試一(1)

解答：

先考慮 $z=\min\{x,y,z\}$，並令 $x=1+a^2,\ y=1+b^2,\ z=1+c^2$，其中 $a\ge c\ge 0, b\ge c\ge 0$。在這些設定條件下，(1)式等價於

$$(1+c^2)(1+(1+a^2)(1+b^2))=(a+b+c)^2\text{。}\qquad (2)$$

由柯西不等式

$$(c^2+1)(1+(a+b)^2)\ge(a+b+c)^2\text{。}\qquad (3)$$

由(2)式與(3)式可得

$$(a+b)^2\ge(1+a^2)(1+b^2)\text{。}\qquad (4)$$

另一方面，由柯西不等式 $(a^2+1)(1+b^2)\ge(a+b)^2$；因此，上面的不等式均為等號。所以 $ab=1$，且 $c(a+b)=1$。

反之，若 $ab=1$ 且 $c(a+b)=1$，則 $c=\dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{b}=a$，$c=\dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{a}=b$。

故，此情況下問題之解為

$$x=1+a^2,\ y=1+\frac{1}{a^2},\ z=1+\left(\frac{a}{1+a^2}\right)^2$$，其中 a 可以是任意不小於 1 的正數。

當然 $x,\ y,\ z$ 重排也是解 (因為也可設 b 或 a 是 $a,\ b,\ c$ 中最小的)。

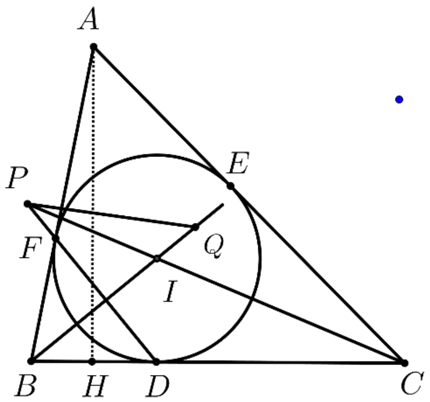
110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

如圖，ΔABC 的內心為 I，其內切圓與 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的切點分別是 D,E,F。直線 $\overleftrightarrow{CI},\overleftrightarrow{DF}$ 交於點 P，點 Q 在 $\overline{BI}$ 的延長線上，它與 B 在直線 $\overleftrightarrow{PC}$ 的相反兩側，且滿足 $\overline{PQ}+\overline{BC}=s$，其中 s 是 ΔABC 的半周長。令 $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於點 H。試證：

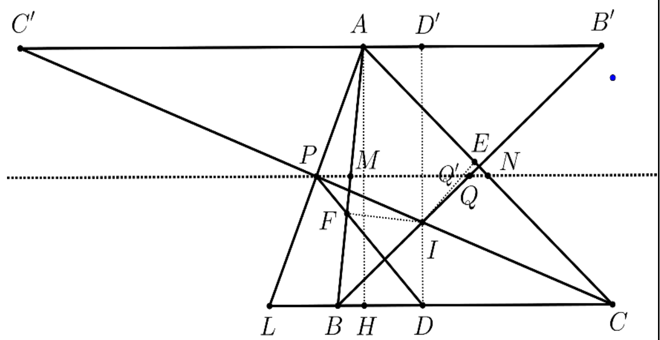
(1) A,I,F,P 四點共圓；

(2) P,Q,D,H 四點共圓。



解析		
類　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)	
試題出處	■ 自編　□ 改編於：	
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	編號：筆試一(2)

解答：



1. 設 M,N 分別為 $\overline{AB},\overline{AC}$ 的中點，且 $\overline{BC}=a,\overline{CA}=b,\overline{AB}=c$。因為

$$\angle DPC=\angle PDB-\tfrac{1}{2}\angle C=\angle FIB-\tfrac{1}{2}\angle C$$
$$=90^\circ-\tfrac{1}{2}\angle B-\tfrac{1}{2}\angle C=\tfrac{1}{2}\angle A,$$

即 $\angle FPI=\angle FAI$，得 A,I,F,P 共圓，

所以 $\angle API=\angle AFI=90^\circ$。

令 L 為 $\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 的交點，因 $\overleftrightarrow{CI}$ 是分角線，

P 為 $\overline{AL}$ 的中點，故 P 是在 $\overleftrightarrow{MN}$ 上。

2. 設過 A 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 平行的直線與 $\overleftrightarrow{BI},\overleftrightarrow{CI}$ 分別交於 B',C'。因 $\angle AB'B=\angle B'BC=\angle ABB'$，

$\overline{AB'}=\overline{AB}=c$；同理 $\overline{AC'}=\overline{AC}=b$。所以，得 $\overline{B'C'}=b+c$。由此可得

$$\frac{\overline{C'I}}{\overline{CI}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{b+c}{a},\quad \frac{\overline{CP}}{\overline{CI}}=\frac{\overline{CC'}/2}{\overline{CI}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{C'I}+\overline{CI}}{\overline{CI}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(b+c)+a}{a}=\frac{s}{a}。$$

設 Q' 是 $\overleftrightarrow{BI}$ 與 $\overleftrightarrow{MN}$ 的交點，則 $PQ'\parallel BC$，$\dfrac{\overline{PQ'}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{PI}}{\overline{CI}}=\dfrac{\overline{CP}-\overline{CI}}{\overline{CI}}=\dfrac{s-a}{a}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BC}}$。所以，

$\overline{PQ'}=\overline{PQ}$；得 Q' 與 Q 重合（因 $BFID$ 是箏形，得 $PD\perp BI$，且 Q' 與 B 在 $\overleftrightarrow{CI}$ 的相反兩側）。

3. 因 Q 是在 $\overleftrightarrow{MN}$ 及分角線上，用與 **1**. 同樣的證明可得 $\angle AQB=90^\circ$. 所以 P,Q 是在以 $\overline{AI}$ 為直徑的圓（記為 K）上（此圓也通過 E,F）。設 $\overleftrightarrow{DI}$ 與 $\overleftrightarrow{B'C'}$ 交於點 D'，則 D' 是在圓 K 上。因 H,D 分別是 A,D' 對 MN 的對稱點，且 P,Q,D',A 共圓，所以，P,Q,D,H 也共圓。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

設$\langle a_n\rangle$及$\langle b_n\rangle$為公比不相等的兩個等比數列，而 $c_n=\alpha a_n+\beta b_n$ 都不等於 0，其中α,β為非零實數。令 n 次多項式 $f_n(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$。已知對於正整數$n\ge 2$，多項式 $f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)$除以$xf_{n-1}(x)$的餘式皆為次數小於或等於 1 的多項式，試證：乘積 a_nb_n 是一與 n 無關的常數。

解析		
	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：
	難 易 度	■ 難　□ 中等　□ 易　｜ 編 號：筆試一(3)

解答： 對於整數$n\ge 2$,

$$f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)=c_0+c_1x+\sum_{i=2}^{n}(c_i+c_{i-2})x^i，$$

而 $xf_{n-1}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^{i+1}$。由於

$$\deg\left(f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)\right)\le\deg\left(xf_{n-1}(x)\right)，$$

因此，$f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)=\lambda_nxf_{n-1}(x)+r_n(x)$，其中 $r_n(x)=0$ 或 $\deg r_n(x)<\deg\left(xf_{n-1}(x)\right)$。比較 x^{n-1} 項的係數，得 $c_{n-1}+c_{n-3}=\lambda_nc_{n-2}$。

同理，由 $f_{n-1}(x)+x^2f_{n-3}(x)=\lambda_{n-1}xf_{n-2}(x)+r_{n-1}(x)$，再比較 x^{n-1} 項的係數，得知 $c_{n-1}+c_{n-3}=\lambda_{n-1}c_{n-2}$。因此，$\lambda_n=\lambda_{n-1}$，故 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=\lambda$，其中 λ 為常數。由題目所給的條件 $\deg r_n(x)\le 1$，可知

$$r_n(x)=f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)-\lambda xf_{n-1}(x)=c_0+(c_1-\lambda c_0)x，$$

且對於所有大於或等於 2 的整數 n 皆有 $c_n+c_{n-2}=\lambda c_{n-1}$。

調整條件中的α,β，不失一般性，可假設$a_n=r_1^n$，$b_n=r_2^n$，其中 r_1,r_2 為非零實數。注意：$c_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n=\left(\alpha r_1^2\right)r_1^{n-2}+\left(\beta r_2^2\right)r_2^{n-2}$，且

$$\lambda c_{n-1}-c_{n-2}=\alpha\left(\lambda r_1-1\right)r_1^{n-2}+\beta\left(\lambda r_2-1\right)r_2^{n-2}。$$

由數列 c_n 的遞迴式 $c_n=\lambda c_{n-1}-c_{n-2}$，得

$$\left(\alpha r_1^2\right)r_1^{n-2}+\left(\beta r_2^2\right)r_2^{n-2}=\alpha\left(\lambda r_1-1\right)r_1^{n-2}+\beta\left(\lambda r_2-1\right)r_2^{n-2}，\forall n\ge 2。\qquad (1)$$

以下我們要證明：$r_i^2=\lambda r_i-1,\ i=1,2$。這可以分兩種情況討論如下：

(A) $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right|\neq 1$：若$\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right|<1$，則式$(1)$等同於

$$\left(\alpha r_1^2\right)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-2}+\left(\beta r_2^2\right)=\alpha\left(\lambda r_1-1\right)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-2}+\beta\left(\lambda r_2-1\right)\text{，}\forall n\geq 2\text{。}$$

令$n\to\infty$，得$\beta r_2^2=\beta\left(\lambda r_2-1\right)\Rightarrow r_2^2=\lambda r_2-1$代入上式，則有

$$\alpha r_1^2=\alpha\left(\lambda r_1-1\right)\Rightarrow r_1^2=\lambda r_1-1\text{。}$$

由對稱性，若$\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right|>1$亦可得相同結論。

(B) $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right|=1$：則$r_2=r_1$或$-r_1$. 我們有$c_n=\left(\alpha+\beta\right)r_1^n$或$c_n=\left(\alpha+\left(-1\right)^n\beta\right)r_1^n$，$\forall n\geq 0$。

再由c_n的遞迴式$c_n=\lambda c_{n-1}-c_{n-2}$，亦可得出$r_1^2=\lambda r_1-1$（此時必然是$r_2=r_1=1$）。

綜合以上的討論得知：$r_1,\ r_2$是二次方程$x^2-\lambda x+1=0$的兩個根，再由根與係數的關係知道：$r_1r_2=1$。所以，$a_nb_n=r_1^nr_2^n=1$為一個與n無關的常數。

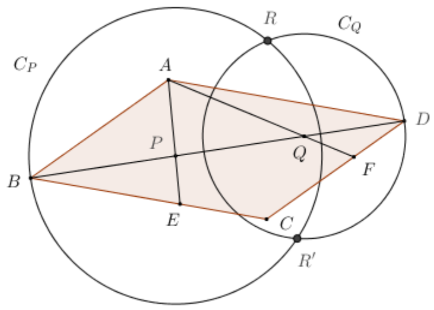
110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E 在 $\overline{BC}$ 上，點 F 在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BD}$ 於點 P，$\overline{AF}$ 交 $\overline{BD}$ 於點 Q。設 C_P 是以 P 為圓心、$\overline{BP}$ 為半徑的圓，而 C_Q 是以 Q 為圓心、$\overline{QD}$ 為半徑的圓，且兩圓的交點為 R, R'。試證：$\overline{BE}\times\overline{DF}=\overline{CE}\times\overline{CF}$ 的充要條件為 $\angle BRD=120^\circ$。

解析		
類　型	☐ 代數(A)　☐數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)	
試題出處	■ 自編　☐ 改編於：	
難 易 度	☐ 難　☐ 中等　■ 易	編 號：筆試二(1)

解答：



為了簡潔，令 $\overline{BP}=a$, $\overline{PQ}=c$, $\overline{QD}=b$ 。

因為 $\overline{BP}=\overline{RP}$，所以 $\angle PBR=\angle PRB\equiv\alpha$ 。同理，因為 $\overline{QR}=\overline{QD}$，所以 $\angle QRD=\angle QDR\equiv\beta$ 。

由 ΔBDR 內角和為 180°，得知 $2\alpha+2\beta+\angle PRQ=180^\circ$，故 $\alpha+\beta=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle PRQ$ 。因此，

$\angle BRD=\alpha+\beta+\angle PRQ=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle PRQ$ 。由此可知：$\angle BRD=120^\circ \Leftrightarrow \angle PRQ=60^\circ$ 。

再由餘弦定理，得知：上式也等價於

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos\angle PRQ=\frac{1}{2}\text{，即 } c^2=a^2+b^2-ab\text{，亦即 }\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=1\text{ 。}$$

另一方面，利用 $\Delta PBE\sim\Delta PDA$，得 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=1-\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$ 。同理，由 $\Delta QFD\sim\Delta QAB$，得到 $\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{CD}}$ 。因此，

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=1 \Leftrightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \Leftrightarrow \overline{BE}\times\overline{DF}=\overline{CE}\times\overline{CF}\text{ 。證畢！}$$

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

<table>
<tr><td colspan="4">題目：
試問有多少組整數數對(a,b)，滿足$1\le a\le b\le 2021$，且$\dfrac{ab^2+a+b}{a^2b+a+9}$為整數？</td></tr>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">☐ 自編　■ 改編於：IMO shortlisted problem</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　■ 中等　☐ 易</td><td>編 號</td><td>筆試二(2)</td></tr>
</table>

解答：

設$A=a^2b+a+9$，$B=ab^2+a+b$。由題意知：A能整除$aB-bA=a^2-9b$。

(1) 若$a^2-9b\ge 0$，則因$A>a^2-9b$，可知$a^2-9b=0\ \Rightarrow\ 9\,|\,a^2$。

設$a=3k$，$b=k^2$分別代入A,B，可得$A=3(3k^4+k+3)$，$B=k(3k^4+k+3)$。

又$A\,|\,B\ \Leftrightarrow\ 3\,|\,k$，可令$k=3m$，其中$m$為正整數。因此，$a=9m,b=9m^2$。

又$1\le a\le b\le 2021$，得$m=1,2,3,\cdots,14$。

(2) 若$a^2-9b<0$，則$9b-a^2\ge A$，即$(9-a^2)b\ge a^2+a+9\ \Rightarrow\ a^2<9$，故$a=1$或$2$。

(i) $a=1\ \Rightarrow\ A=b+10,\ b+10\,|\,9b-1$，

又 $9b-1=9(b+10)-91\ \Rightarrow\ b+10\,|\,91$。

由 $91=1\times 91=7\times 13$，可得 $b=3$或81。

檢驗 $(1,3),(1,81)$ 均能使$A\,|\,B$。

(ii) $a=2\ \Rightarrow\ A=4b+11,\ 4b+11\,|\,9b-4$，

又 $4(9b-4)=9(4b+11)-115\ \Rightarrow\ 4b+11\,|\,115$。

由 $115=1\times 115=5\times 23$，可得 $b=3$或26。

檢驗 $(2,3),(2,26)$ 均能使$A\,|\,B$。

因此，可能的數對(a,b)為$(9m,9m^2)$，其中$m=1,2,3,\cdots,14$，以及$(1,3),(1,81),(2,3),(2,26)$，共18組。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

用 0 和 1 排成的 n 項數列中，滿足連續兩項為 0,0 的組數與連續兩項為 1,1 的組數相等之數列稱為「n 項的平衡數列」。例如：8 項數列 0,0,0,1,1,0,1,1 中，連續兩項為 0,0 的有 2 組，連續兩項為 1,1 的也有 2 組；因此，數列 0,0,0,1,1,0,1,1 為「8 項的平衡數列」。試問對任意的正整數 n，有多少種 n 項的平衡數列？

解析				
	類　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難 易 度	■ 難　□ 中等　□ 易	編 號	筆試二(3)

解答：

設有 a_n 種「n 項的平衡數列」。顯然，$a_1 = 2$；以下考慮 $n \ge 2$。

對一個「n 項的平衡數列」，令 p_k 表示數列中第 k 個 0 區塊數字 0 的個數，而 q_k 表示數列中第 k 個 1 區塊數字 1 的個數；例如：「8 項的平衡數列」0,0,0,1,1,0,1,1 中，$p_1 = 3, p_2 = 1$；而 $q_1 = q_2 = 2$。則該數列連續兩項為 0,0 的組數為 $\sum_{k=1}^{r}(p_k - 1)$，而連續兩項為 1,1 的組數為 $\sum_{k=1}^{s}(q_k - 1)$，其中

$s = r$ (當首項與末項的數字不同) 或 $|s - r| = 1$ (當首項與末項的數字相同)。

因此，數列是「n 項的平衡數列」的充要條件為 $\sum_{k=1}^{r}(p_k - 1) = \sum_{k=1}^{s}(q_k - 1)$，

即 $\sum_{k=1}^{r} p_k - \sum_{k=1}^{s} q_k = r - s$。又 $\sum_{k=1}^{r} p_k + \sum_{k=1}^{s} q_k = n$，解得：

$$\sum_{k=1}^{r} p_k = \frac{n}{2} + \frac{r-s}{2}，\quad \sum_{k=1}^{r} q_k = \frac{n}{2} - \frac{r-s}{2}。$$

(i) 當 n 為偶數時，$r-s=2\sum_{k=1}^{r}p_k-n$ 亦為偶數，故 $s=r$；由此可得：每一個「n 項的平衡數列」的首項與末項的數字不同，且數字 0 與數字 1 各出現 $\frac{n}{2}$ 次。其中，首項為 0 與末項為 1 的「n 項的平衡數列」有 $C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}$ 種，而首項為 1 與末項為 0 的「n 項的平衡數列」也有 $C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}$ 種；故 $a_n=2C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}$。

(ii) 當 n 為奇數時，$r-s=2\sum_{k=1}^{r}p_k-n$ 亦為奇數，故 $|s-r|=1$；由此可得：每一個「n 項的平衡數列」的首項與末項的數字相同，且數字 0 與數字 1 出現的次數相差 1 次。因此，$a_n=2C^{n-2}_{\frac{n-1}{2}}$。

合併上述的結果，可得對任意正整數 n，$a_n=2C^{n-2}_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}$。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

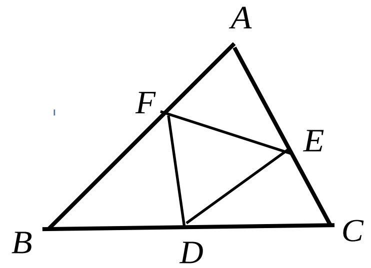
<table>
<tr><td colspan="5">題目：

設 D,E,F 分別是 ΔABC 三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 上的點。試證: $\Delta AEF,\Delta BDF,\Delta CDE$ 中至少有一個三角形的面積不大於 ΔDEF 的面積。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　型</td><td colspan="3">■ □ 代數(A)　□ 數論(N)　幾何(G)　□ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>□ 難　□ 中等　■ 易</td><td>編號</td><td>獨立研究一(1)</td></tr>
</table>

解答：

設 $\alpha=\dfrac{\Delta AEF}{\Delta ABC},\beta=\dfrac{\Delta BDF}{\Delta ABC},\gamma=\dfrac{\Delta CDE}{\Delta ABC},\delta=\dfrac{\Delta DEF}{\Delta ABC}$，可知 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$。

不失一般性，可設 $\alpha\ge\beta\ge\gamma$。



(1) 若 $\alpha\le\dfrac{1}{4}$，則有 $\delta=1-\alpha-\beta-\gamma\ge1-\dfrac{1}{4}\times3=\dfrac{1}{4}\ge\alpha$，

故得到 $\delta\ge\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$。

(2) 若 $\alpha>\dfrac{1}{4}$，令 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\lambda,\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CA}}=\mu,\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\nu$，所以 $0\le\lambda,\mu,\nu\le1$。

利用 $\dfrac{\Delta AEF}{\Delta ABC}=\dfrac{\overline{AF}\times\overline{AE}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\nu\times(1-\mu)$，可得到 $\alpha=\nu(1-\mu)$。

同理，$\beta=\lambda(1-\nu),\gamma=\mu(1-\lambda)$。

由此可知

$$\begin{aligned}\delta&=1-\alpha-\beta-\gamma=1-\nu(1-\mu)-\lambda(1-\nu)-\mu(1-\lambda)\\&=1-\nu+\nu\mu+\lambda+\lambda\nu+\mu+\mu\lambda=\lambda\mu\nu+(1-\mu)(1-\nu)(1-\lambda)\end{aligned}$$ 。

再利用不等式 $(k_1+k_2)^2\ge4k_1k_2$，$\alpha>\dfrac{1}{4}$，以及 $\alpha\ge\beta\ge\gamma$，可進一步得到

$$\delta^2\ge4\lambda\mu\nu(1-\mu)(1-\nu)(1-\lambda)=4\alpha\beta\gamma>\beta\gamma\ge\gamma^2$$，

亦即 $\delta\ge\gamma$，故 $\delta\ge\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$，證畢！

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

將 $3,4,5,6,\cdots,1155$ 這 1153 個正整數重新排成一數列 $\langle a_k \rangle$，使得對每一個 $k=1,2,3,\cdots,1153$，第 k 項 a_k 都是 k 的倍數。試問共有多少種不同的排法？

<table>
<tr><td rowspan="3">解
析</td><td>類　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">☐ 自編　■ 改編於：大陸競賽試題</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　☐ 中等　■ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究一(2)</td></tr>
</table>

解答：

因為 a_k 為 k 的倍數，故 1154 及 1155 只能排在以自己因數為號碼的位置上。

又 $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$，$1154 = 2 \times 577$，所以，

$1155=a_m, 1154=a_n$，其中 m 為 $3\times5\times7\times11$ 的因數，n 為 2×557 的因數。

注意：$1155 \neq a_{1153}$ 且 $1154 \neq a_{1153}$。又 1153 為質數，故 $1153=a_1$ 或 $1153=a_{1153}$。

當排好 1155 的位置後，1154 只能排在第 2 號位置，否則會發生小數排在大號碼的情形，則不符合條件。因此，僅需考慮 1155 的因數排法。

為方便算法，我們以符號 $(a,b,c,\cdots)$ 記錄 1155 的因數排法。例如：$1155=a_{385}$、$385=a_{77}$、$77=a_{11}$、$11=a_1$，記為 $(3,5,7,11)$；而 $1155=a_{385}$、$385=a_{55}$、$55=a_{11}$、$11=a_1$ 時，記為 $(3,7,5,11)$；又如：$1155=a_{385}$、$385=a_{77}$、$77=a_1$ 時，記為 $(3,5,7\times11)$。

(1) 若 1155 排第 1 號位置，即 $1155=a_1$，則 $1154=a_2$，其他的數只能排在以自己為號碼的位置上，否則會發生小數排在大號碼的情形。

(2) 以 3 為首的排列共有 13 種：即 $(3,5,7,11)$ 有 $3!=6$ 種、$(3,5,7\times11)$ 有 $C_1^3=3$ 種、$(3,5\times7,11)$ 有 $C_1^3=3$ 種、$(3,5\times7\times11)$ 有 $C_3^3=1$ 種。同理，分別以 $5,7,11$ 為首的也各有 13 種。因此共有 $13\times4=52$ 種。

(3) 形如 3×5 為首有 3 種：即 $(3\times5,7,11),(3\times5,11,7),(3\times5,7\times11)$。故此類型共有 $C_2^4\times3=18$ 種。

(4) 形如 $3\times5\times7$ 為首有 1 種：即 $(3\times5\times7,11)$，故此類型共有 $C_3^4\times1=4$ 種。

所以，共有 $1+52+18+4=75$ 種。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

<table>
<tr><td colspan="4">題目：
有一群人，人數至少 100 人，其中任意兩人或者彼此認識，或者彼此不認識。現在想將這群人分組（每一組至少一人，各組人數可以不相等）。如果每一組中的任意兩人都彼此不認識，稱為「好分組」。已知不管怎麼分，都無法分成 99 組的「好分組」，但是可以有分成 100 組的「好分組」。試證：在分成 100 組的「好分組」中，都可以在第 k 組中選出一個人 v_k，使得對每一個 $k=1,2,3,\cdots,99$，都有 v_k 認識 v_{k+1}。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　　型</td><td colspan="2">☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="2">■ 自編　　☐ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>☐ 難　■ 中等　☐ 易</td><td>編號　獨立研究一(3)</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：
考慮圖 $G(V,E)$，以這群人為頂點(vertex)，當中彼此認識時連一條邊(edge)。
已知著色數(chromatic number) $\chi(G)=100$，我們要證明：
對於著色數 $\chi(G)=n$ 的圖形（色彩種類 $c_1,c_2,\cdots,c_n$），給定任何一種著色方式，總是可以找到一條路徑(path) $v_1v_2\cdots v_n$，其中頂點 v_k 的著色為 c_k。

以非空集合 V_1 表示著上色彩 c_1 的頂點集合，並以 V_k 表示著上色彩 c_k 且至少有一個鄰點(neighbour)著上色彩 c_{k-1} 的頂點所成的集合。我們肯定 $V_k\neq\varnothing$，對 $2\le k\le n$ 皆如此。事實上，如果首先出現空集合的 V_k 的標號為 m，從 $1\le k\le m-1$，逐一將 V_k 中的頂點著上色彩 c_{k+1}，這樣的著色方式將只需要 $n-1$ 種色彩，與 $\chi(G)=n$ 矛盾。
現在，從 V_n 的某個頂點 v_n 開始，從 V_{n-1} 中挑選 v_{n-1}，使得 $v_{n-1}v_n$ 相鄰，再從 V_{n-2} 中挑選 v_{n-2}，使得 $v_{n-2}v_{n-1}$ 相鄰，以此類推，即可得到一條路徑 $v_1v_2\cdots v_n$。</td></tr>
</table>

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

試求滿足下列條件的最小正整數 n：

當整係數多項式函數 $f(x)$ 有 n 個相異整數 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，滿足

$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=1$ 時，方程式 $f(x)=3$ 就不會有整數解。

<table>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　　型</td><td colspan="3">■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□難　□中等　■易</td><td>編 號</td><td>獨立研究二(1)</td></tr>
</table>

解答：

$n=1,2$ 時，顯然不合題意。

$n=3$ 時，取 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+1$， 則 $f(-1)=f(1)=f(2)=1$，而 $f(0)=3$。

故 $n=3$ 也不滿足題意之條件。

對 $n\ge 4$ 時，可設 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)g(x)+1$，其中 $g(x)$ 是整係數多項式函數。假設存在某個整數 m，使得 $f(m)=3$，則

$$(m-x_1)(m-x_2)\cdots(m-x_n)g(m)=2 \text{。}$$

由 $|g(m)|\ge 1$，可得 $|(m-x_1)(m-x_2)\cdots(m-x_n)|\le 2$。　　　　(*)

這些 $m-x_1,m-x_2,\cdots,m-x_n$ 均非零且都相異，但 4 個以上非零的相異整數乘積的絕對值至少為 4，此與(*)矛盾。因此，最小正整數 $n=4$。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

試證：不存在任何的正整數解 (x,y,z,w)，滿足下列方程式：

$$4x^4+9y^4=11(z^4+w^4) \text{。} \quad (1)$$

解析	類　型	☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)
	試題出處	■ 自編　☐ 改編於：
	難 易 度	☐ 難　■ 中等　☐ 易　｜ 編 號：獨立研究二(2)

解答：

1. 首先證明：下列方程式沒有任何的正整數解 (x,y,z,w)

$$x^2+y^2=11(z^2+w^2) \text{。} \quad (2)$$

令

$$S=\{(x,y,z,w) \mid (x,y,z,w) \text{ 為方程式 (2)的正整數解}\}\text{。}$$

假設 S 不為空集合，則存在 $(x_1,y_1,z_1,w_1)\in S$ 滿足

$$m=\min_{(x,y,z,w)\in S}(x+y+z+w)=x_1+y_1+z_1+w_1>0 \quad (3)$$

且 $x_1^2+y_1^2=11(z_1^2+w_1^2)$. (4)

由(4)式我們容易得到 11 都必須整除 x_1 與 y_1。

可設 $x_1=11x_2,\ y_1=11y_2$ 。 (5)

從 (4)與(5)，我們得到

$$z_1^2+w_1^2=11(x_2^2+y_2^2)\text{。} \quad (6)$$

由 (6) 得知

$$(z_1,w_1,x_2,y_2)\in S \text{ 且 } 0<x_2+y_2+z_1+w_2<m\text{。} \quad (7)$$

從(3)與(7)得到矛盾，因此，S 為空集合。

2. 若(1)中有一組解 (x,y,z,w)，我們令 $a=2x^2,b=3y^2,c=z^2,d=w^2$，則 (a,b,c,d) 滿足 (2) 式，此與 $S=\varnothing$ 矛盾！因此，我們得到此題的證明.

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

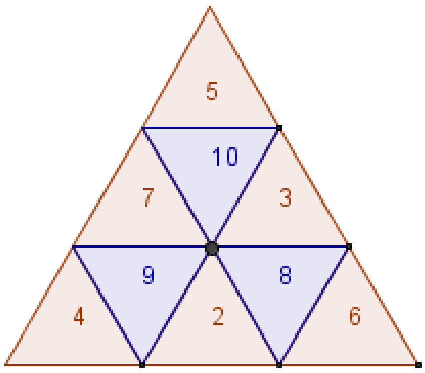
題目：

將邊長為 3 的正三角形分成九個全等的單位三角形。一開始每個單位三角形裡都填 0。每次操作可以選擇兩個相鄰的單位三角形（相鄰意為有共同邊）而將這兩個三角形內的數字都同時加 1 或同時減 1。已知經由若干次操作後，九個數恰好形成連續的正整數 $n,(n+1),\cdots,(n+8)$ ，試求所有可能的 n 值。

解析				
	類　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編 號**	**獨立研究二(3)**

解答： $n=2$ 是唯一的可能。

從數字總和的奇偶性，得知不可能 $n=1$。當 $n=2$ 時，很容易寫出例子，如下：



假設 $n>2$ 辦得到。把各個單位三角形用 $1,2,3,\cdots,9$ 加以編號(左下角是 1, 右下角是 5)。將編號 2, 4, 7 的單位三角形塗色，並以 $S_{2,4,7}$ 表示在這 3 個單位三角形內的數字總和，$S_{1,3,5,6,8,9}$ 也是類似的定義。顯然，在操作過程中，總是有 $S_{2,4,7}=S_{1,3,5,6,8,9}$ ，因此，當數字 $n,(n+1),\cdots,(n+8)$ 填入各單位三角形時，此式子也成立。但是，

$$S_{2,4,7}\le(n+8)+(n+7)+(n+6)=3n+21，$$

而

$$S_{1,3,5,6,8,9}\ge n+(n+1)+\cdots+(n+5)=6n+15>3n+21\ge S_{2,4,7}。$$

因此，$S_{2,4,7}<S_{1,3,5,6,8,9}$ ，這是錯的。因此，答案僅有 $n=2$。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

設有 n 張牌，分別寫上 $1,2,3,\cdots,n$。對任意牌型 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，進行以下操作：若 a_n 為奇數，則將 a_n 置於最前面，即得新牌型 $a_n,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$；若 a_n 為偶數，則將 a_n 置於 a_1 與 a_2 之間，即得新牌型 $a_1,a_n,a_2,\cdots,a_{n-1}$。試證：當 a_1 為奇數時，經過連續操作多次後可回到原牌型，並求此最少的操作次數。

<table>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　　☐ 改編於：大陸競賽試題</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　☐ 中等　■ 易</td><td>編 號</td><td>口試一</td></tr>
</table>

解答： 先將原牌型分組如下：

$$\underline{a_1},\ \underline{a_2,a_3,\cdots,a_{i_1}},\ \underline{a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2}},\cdots\cdots,\ \underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_{i_{j+1}}},\ A\quad,$$

其中 $a_1,a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{j+1}}$ 均為奇數，其他都是偶數，而末端 A 中的數均為偶數或無。

設 $|A|=r$，即 A 由 r 個偶數所組成。

(1) 若 $r\geq 1$，則經過連續 r 次操作後，牌型變成

$$\underline{a_1},\ \underline{A,a_2,a_3,\cdots,a_{i_1}},\ \underline{a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2}},\cdots\cdots,\ \underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_{i_{j+1}}}\ 。$$

設此時最後一組 $\underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_{i_{j+1}}}$ 有 k 張牌，即 $k=i_{j+1}-i_j$。則再經過 k 次操作後，牌型變成

$$\underline{a_{i_{j+1}}},\ \underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_{i_{j+1}-1},a_1},\ \underline{A,a_2,a_3,\cdots,a_{i_1}},\ \underline{a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2}},\cdots\cdots\ 。$$

依此下去，不難發現：原牌型經過 $n-1$ 次操作後，牌型變成

$$\underline{a_{i_1}},\ \underline{a_2,a_3,\cdots,a_{i_2}},\ \underline{a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_3}},\cdots\cdots,\ \underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_1},\ A\ 。$$

即牌型僅有奇數作一次輪換，而偶數位置不變。由此分析，可知：

當 n 為奇數時，原牌型有 $\frac{n+1}{2}$ 個奇數，故經過 $\frac{n+1}{2}$ 回的 $n-1$ 次操作後，所有奇數就會輪換到原位置。此時，最少的操作次數為 $\frac{n+1}{2}\times(n-1)=\frac{n^2-1}{2}$。當 n 為偶數時，原牌型有 $\frac{n}{2}$ 個奇數，故經過 $\frac{n}{2}$ 回的 $n-1$ 次操作後，所有奇數就會輪換到原位置。此時，最少的操作次數為 $\frac{n}{2}\times(n-1)=\frac{n^2-n}{2}$。

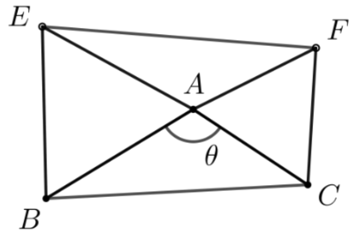
(2) 若 $r=0$，同情況(1)的分析，結果亦同。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽)

題目：

如圖，在 ΔABC 的邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的外側分別作正三角形 ΔABE 及 ΔACF。已知 $\overline{AC}=1$ 且 $\overline{EF}=2$。

試求 ΔABC 面積的最大可能值。



<table>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　☐數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　　☐ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　☐ 中等　■ 易</td><td>編 號</td><td>口試二</td></tr>
</table>

解答：

令 $\angle BAC=\theta$，$\overline{AB}=c$，則 $\angle EAF=240^\circ-\theta$。

由餘弦定理：

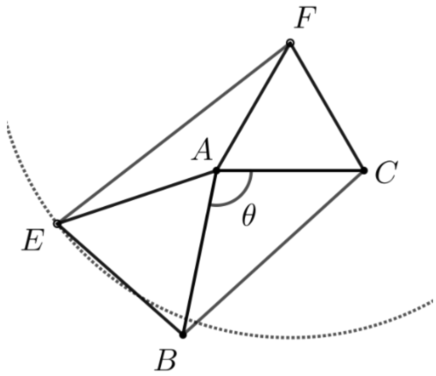
$$\overline{EF}^2=\overline{AE}^2+\overline{AF}^2-2\overline{AE}\times\overline{AF}\cos(240^\circ-\theta)，$$

所以，

$$\begin{aligned}3&=c^2-2c\cos(240^\circ-\theta)\\&=c^2-2c(\cos240^\circ\cos\theta+\sin240^\circ\sin\theta)\\&=c^2+c\cos\theta+\sqrt{3}c\sin\theta.\end{aligned}$$

令 $x=c\cos\theta,\ y=c\sin\theta$，將上式改寫為

$$x^2+y^2+x+\sqrt{3}y=3.$$



配方得 $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2=4$。因此，

$$\Delta ABC\text{ 面積}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot c\cdot\sin\theta=\frac{y}{2}\le\frac{1}{2}(2-\frac{\sqrt{3}}{2})=1-\frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{(此為最大值)。}$$

以下說明：任給 $0^\circ<\theta<180^\circ$，都有滿足條件的 ΔABC：

如圖所示，固定平面上邊長為 1 的正三角形 ΔACF。考慮以 F 為中心作半徑為 2 的圓，設 E 為圓上的動點，且從射線 $\overrightarrow{AC}$ 逆時針旋轉至射線 $\overrightarrow{AE}$ 的角度是在 60° 至 180° 的範圍，在 $\overleftrightarrow{AE}$ 下側作正三角形 ΔABE；此時，點 B 與點 F 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 的相反兩側，又這兩個正三角都在 ΔABC 的外部，所以，θ 可任意在 0° 至 180° 間變化。