

111 年大學入學學力測驗數學(數 B)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題(占85分)

一、單選題(占35分)

1. 試問有多少個整數 x 滿足 $2|x|+x<10$?

(1)13個 (2)14個 (3)15個 (4)16個 (5)無窮多個。

【111 年學測數 B】

答：(1)

解： $2|x|+x<10, x \in \mathbb{Z}$

若 $x \geq 0 \Rightarrow 3x < 10 \Rightarrow x < \frac{10}{3}$ ，取 $0 \leq x < \frac{10}{3}$

若 $x < 0 \Rightarrow -x < 10 \Rightarrow x > -10$ ，取 $-10 < x < 0$

綜合上述： $-10 < x < \frac{10}{3}, x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = -9, -8, -7, \dots, -1, 0, 1, 2, 3$

解： $|2x| < 10 - x, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x)^2 - (10 - x)^2 < 0 \Rightarrow (x - 10)(3x - 10) < 0, x \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow -10 < x < \frac{10}{3}, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -9, -8, -7, \dots, -1, 0, 1, 2, 3$

2. 某燈會布置變色閃燈，每次啟動後的閃燈顏色會依照以下的順序做週期性變換：
藍-白-紅-白-藍-白-紅-白-藍-白-紅-白...，每四次一循環，其中藍光每次持續5秒，
白光每次持續2秒，而紅光每次持續6秒。假設換燈號的時間極短可被忽略，
試選出啟動後第99至101秒之間的燈號。

(1)皆為藍燈 (2)皆為白燈 (3)皆為紅燈
(4)先亮藍燈再亮白燈 (5)先亮白燈再亮紅燈。

【111 年學測數 B】

答：(3)

解：完整週期 $(5+2+6+2)=15$ 秒

$99 = 15 \times 6 + (5+2+[2]), 101 = 15 \times 6 + (5+2+[4])$

3. 有八棟大廈排成一列，由左至右分別編號1,2,3,4,5,6,7,8。今電信公司想選取其中三棟大廈的屋頂分別設立一座電信基地台。若基地台不能設立於相鄰的兩棟大廈，以免訊號互相干擾，試問在3號大廈不設立基地台的情況下，有多少種設立基地台的選取方法？

(1)12 (2)13 (3)20 (4)30 (5)35。

【111 年學測數 B】

答：(2)

解： $C_1^2 C_2^4 + C_3^3 = 12 + 1 = 13$

4. 在坐標平面上，已知向量 $\overrightarrow{PQ} = \left(\log \frac{1}{5}, -10^{-5} \right)$ ，其中點 P 的坐標為 $\left(\log \frac{1}{2}, 2^{-5} \right)$ 。

試選出正確的選項。

(1)點 Q 在第一象限 (2)點 Q 在第二象限 (3)點 Q 在第三象限
(4)點 Q 在第四象限 (5)點 Q 位於坐標軸上。

【111 年學測數 B】

答：(2)

解： $Q(x, y) = \left(\log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{5}, 2^{-5} - 10^{-5} \right) = \left(\log \frac{1}{10}, \frac{1}{32} - \frac{1}{10^5} \right) = (-, +)$

5. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^7 - 3A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？

- (1)-8 (2)-5 (3)5 (4)8 (5)10。

【111 年學測數 B】

答：(5)

解： $A = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & -\cos 45^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow A^7 = 8\sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$A^7 - 3A = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

6. 假設地球為一半徑 r 的球體，有一質點自甲地沿著該地所在經線往北移動，抵達北極點時移動所經過的弧線之長度為 $\frac{7}{12}\pi r$ 。試問哪一個選項最可能是甲地的位置？

- (1)東經 75° 、北緯 15° (2)東經 30° 、南緯 75° (3)東經 75° 、南緯 15°
(4)西經 30° 、北緯 75° (5)西經 15° 、南緯 30° 。

【111 年學測數 B】

答：(3)

解： $r\theta = \frac{7}{12}\pi r \Rightarrow \theta = \frac{7}{12}\pi$ ，故為南緯 15°

7. 畫家把空間景物用單點透視法畫在平面的畫紙上時，有以下原則要遵守：

- 一、空間中的直線畫在畫紙上必須是一條直線。
- 二、空間直線上點的相關位置必須和畫紙所畫的點的相關位置一致。
- 三、空間直線上的任四個相異點的 K 值，和畫紙所畫的四個點之 K 值必須相同，其中 K 值的定義如下：直線上任給四個有順序的相異點 P_1, P_2, P_3, P_4 ，如附圖。



其所對應的 K 值定義為 $K = \frac{\overline{P_1 P_4} \times \overline{P_2 P_3}}{\overline{P_1 P_3} \times \overline{P_2 P_4}}$ 。

今某畫家依照以上原則，將空間中一直線及該線上的四相異點 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 描繪在畫紙上，其中 $\overline{Q_1 Q_2} = \overline{Q_2 Q_3} = \overline{Q_3 Q_4}$ 。若將畫紙上所畫的直線視為一數線，並將線上的點用坐標來表示，則在下列選項的四個坐標中，試問哪一組最可能是該四點在畫紙上的坐標？

- (1)1, 2, 4, 8 (2)3, 4, 6, 9 (3)1, 5, 8, 9 (4)1, 2, 4, 9 (5)1, 7, 9, 10。

【111 年學測數 B】

答：(5)

$$\boxed{\text{解}}: \frac{\overline{Q_1 Q_4} \times \overline{Q_2 Q_3}}{\overline{Q_1 Q_3} \times \overline{Q_2 Q_4}} = \frac{3 \times 1}{2 \times 2} = K = \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{\overline{P_1 P_4} \times \overline{P_2 P_3}}{\overline{P_1 P_3} \times \overline{P_2 P_4}} = \frac{9 \times 2}{4 \times 3}$$

二、多選題 (占 25 分)

8. 有一射擊遊戲，將發射台設置於坐標平面的原點，並放置三個半徑為 1 的圓盤靶子，其圓心分別為 $(2, 2)$ 、 $(4, 6)$ 與 $(8, 1)$ 。玩家選定一正數 a ，並按下按鈕後，發射台將向點 $(1, a)$ 方向發射一道雷射光束（形成一射線）。假設雷射光束擊中靶子後可以穿透並繼續沿原方向前進（削過圓盤邊緣也視為擊中）。試選出正確的選項。

(1) 雷射光束落在通過原點且斜率為 a 的直線上

(2) 若 $a = \frac{3}{2}$ ，則雷射光束會擊中圓心為 $(4, 6)$ 的圓盤靶子

(3) 玩家可以僅發射一道雷射光束就擊中三個圓盤靶子

(4) 玩家至少需要發射三道雷射光束才可擊中三個圓盤靶子

(5) 玩家發射一道雷射光束後，若擊中圓心為 $(8, 1)$ 的圓盤靶子，則 $a \leq \frac{16}{63}$ 。

【111 年學測數 B】

$\boxed{\text{答}}: (1)(2)(5)$

$\boxed{\text{解}}: (1)$ 方向向量 $(1, a)$ ，斜率 $\frac{a}{1}$

(2) $y = \frac{3}{2}x$ 過 $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 1$ 圓心，有相交

(3)(4) 至少二道雷射光

(5) $y = ax$ 與 $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切 $\Rightarrow a = 0$ 或 $\frac{16}{63}$

9. 設 $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ ，下列關於函數 $y = f(x)$ 的圖形之描述，試選出正確的選項。

(1) $y = f(x)$ 的圖形通過點 $(1, 0)$

(2) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點

(3) 點 $(1, 0)$ 是 $y = f(x)$ 的圖形之對稱中心

(4) $y = f(x)$ 的圖形在對稱中心附近會近似於一直線 $y = 3x - 3$

(5) $y = 3x^3 - 6x^2 + 2x$ 的圖形可由 $y = f(x)$ 的圖形經適當平移得到。

【111 年學測數 B】

$\boxed{\text{答}}: (1)$

$\boxed{\text{解}}: (1) (1, 0) \in y = f(x) = 2x^3 - 3x + 1$

(2) $f(x) = (x-1)(2x^2 + 2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ 共三解

(3) 對稱中心 $(0, 1)$

(4) 所求一次近似為 $y = -3x + 1$

(5) $y = 3x^3 - 6x^2 + 2x$ 與 $y = f(x)$ 大域顯然不同

10. 甲、乙兩班各有 40 位同學參加某次數學考試（總分為 100 分），考試後甲、乙兩班分別以 $y_1 = 0.8x_1 + 20$ 和 $y_2 = 0.75x_2 + 25$ 的方式來調整分數，其中 x_1 、 x_2 分別代表甲、乙兩班的原始考試分數， y_1 、 y_2 分別代表甲、乙兩班調整後的分數。已知調整後兩班的平均分數均為 60 分，調整後的標準差分別為 16 分和 15 分。試選出正確的選項。

- (1) 甲班每位同學調整後的分數均不低於其原始分數
 (2) 甲班原始分數的平均分數比乙班原始分數的平均分數高
 (3) 甲班原始分數的標準差比乙班原始分數的標準差高
 (4) 若甲班 A 同學調整後的分數比乙班 B 同學調整後的分數高，則 A 同學的原始分數比 B 同學的原始分數高
 (5) 若甲班調整後不及格（小於 60 分）的人數比乙班調整後不及格的人數多，則甲班原始分數不及格的人數必定比乙班原始分數不及格的人數多。

【111 年學測數 B】

答：(1)(2)(4)

解：(1) $y_1 - x_1 = (0.8x_1 + 20) - x_1 = 20 - 0.2x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 100$

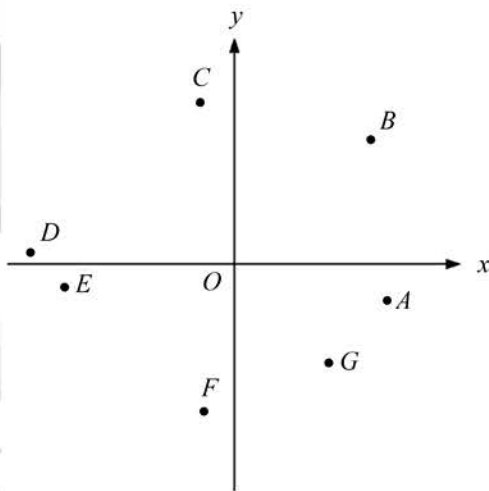
$$(2) 60 = 0.8\overline{X_1} + 20 \Rightarrow \overline{X_1} = 50, 60 = 0.75\overline{X_2} + 25 \Rightarrow \overline{X_2} = 46\frac{2}{3}$$

$$(3) 16 = 0.8S_{x_1} \Rightarrow S_{x_1} = 20, 15 = 0.75S_{x_2} \Rightarrow S_{x_2} = 20$$

$$(4) y_1 - y_2 = (0.8x_1 + 20) - (0.75x_2 + 25) > 0 \Rightarrow 16x_1 > 15x_2 + 100 > 16x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$$

(5) 無法確定

11. 考慮坐標平面上的點 $O(0,0)$ 、 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G ，如圖所示：



其中 B 點、 C 與 D 點、 E 與 F 點、 G 與 A 點依序在一、二、三、四象限內。若 \vec{v} 為坐標平面上的向量，且滿足 $\vec{v} \cdot \vec{OA} > 0$ 及 $\vec{v} \cdot \vec{OB} > 0$ ，則 \vec{v} 與下列哪些向量的內積一定小於 0？

- (1) \vec{OC} (2) \vec{OD} (3) \vec{OE} (4) \vec{OF} (5) \vec{OG} 。

【111 年學測數 B】

答：(2)(3)

解：由 $\vec{v} \cdot \vec{OA} > 0$ ， $\vec{v} \cdot \vec{OB} > 0$ ，表 \vec{v} 與 \vec{OA} 、 \vec{OB} 均夾銳角
 $\vec{v} \cdot \vec{OX} < 0$ ，表 \vec{v} 與 \vec{OX} 夾鈍角 $\Rightarrow X = D$ 、 E

12. 設 a 、 b 、 c 都是非零的實數，且二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根都落在 1 和 3 之間。試選出兩根必定都落在 4 和 5 之間的方程式。

- (1) $a(x-2)^2 + b(x-2) + c = 0$ (2) $a(x+2)^2 + b(x+2) + c = 0$
 (3) $a(2x-7)^2 + b(2x-7) + c = 0$ (4) $a\left(\frac{x+7}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x+7}{2}\right) + c = 0$
 (5) $a(3x-11)^2 + b(3x-11) + c = 0$ 。

【111 年學測數 B】

答：(3)(5)

解： $1 < x < 3 \Rightarrow \begin{cases} (3) 1 < 2x_3 - 7 < 3 \Rightarrow 4 < x_3 < 5 \\ (5) 1 < 3x_5 - 11 < 3 \Rightarrow 4 < x_5 < \frac{14}{3} \end{cases}$

三、選填題（占 25 分）

13. 若 x, y 為兩正實數，且滿足 $x^{\frac{-1}{3}} y^2$ 及 $2\log y = 1$ ，則 $\frac{x - y^2}{10} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【111 年學測數 B】

答：99

解： $2\log y = 1 \Rightarrow y = 10^{\frac{1}{2}}$
 $x^{\frac{-1}{3}} y^2 = 1 \Rightarrow x^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{10} \Rightarrow x = 10^3$
 所求： $\frac{10^3 - 10^1}{10} = 99$

14. 坐標平面上有一個半徑為 7 的圓，其圓心為 O 點。已知圓上有 A, B 兩點，且 $\overline{AB} = 8$ ，則內積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【111 年學測數 B】

答：17

解： $\cos \angle AOB = \frac{7^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 7} = \frac{17}{49}$ ，則 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 7 \times 7 \times \cos \angle AOB = 17$

15. 根據某國對失蹤輕航機的調查得知：失蹤輕航機中有 70% 後來會被找到，在被找到的輕航機當中，有 60% 裝設緊急定位傳送器；而沒被找到的失蹤輕航機當中，則有 90% 未裝設緊急定位傳送器。緊急定位傳送器會在飛機失事墜毀時發送訊號，讓搜救人員可以定位。現有一架輕航機失蹤，若已知該機有裝設緊急定位傳送器，則它會被找到的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡分數）

【111 年學測數 B】

答： $\frac{14}{15}$

解：

解：	被找到 $\frac{70}{100}$	有裝定位器 $\frac{60}{100}$	$\frac{\frac{70}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{70}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{10}{100}} = \frac{14}{15}$
		未裝定位器 $\frac{40}{100}$	
	未找到 $\frac{30}{100}$	有裝定位器 $\frac{10}{100}$	
		未裝定位器 $\frac{90}{100}$	

16. 袋中裝有藍綠黃三種顏色的球共10顆。今從袋中隨機抽取兩顆球(每顆球被抽中的機率相等)，若抽出的兩顆球皆為藍色的機率為 $\frac{1}{15}$ ，皆為綠色的機率為 $\frac{2}{9}$ ，則從袋中隨機抽出兩球，此兩球為相異顏色的機率為_____。(化為最簡分數)

【111 年學測數 B】

答： $\frac{31}{45}$

解： $\frac{C_2^a}{C_2^{10}} = \frac{1}{15} \Rightarrow a = 3$ (藍)， $\frac{C_2^b}{C_2^{10}} = \frac{2}{9} \Rightarrow b = 5$ (綠)，故黃球有2個

$$\frac{C_1^3 C_1^5 + C_1^5 C_1^2 + C_1^2 C_1^3}{C_2^{10}} = \frac{15 + 10 + 6}{45} = \frac{31}{45}$$

17. 有三女三男共六位在校時和老師常有互動的同學，畢業後老師邀聚餐，餐後七人站一橫排照相留念。已知同學中有一女一男兩位曾有過不愉快，照相時不想相鄰，而老師站在正中間且三位男生不完全站在老師的同一側，則可能的排列方式共有_____種。

【111 年學測數 B】

答：456

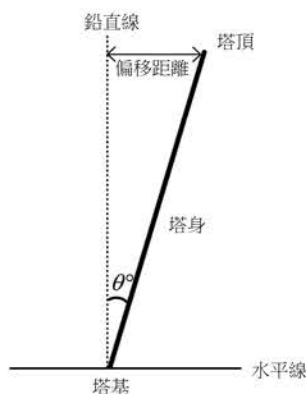
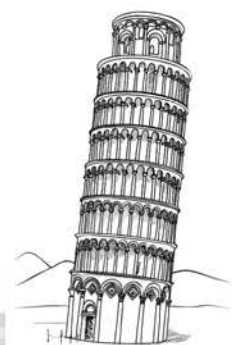
解：
$$\underbrace{6!}_{\text{任意排}} - \underbrace{3! \times 3! \times 2!}_{\substack{\text{男全相鄰} \quad \text{女全相鄰} \quad \text{左右互換}}} - \underbrace{[5! - 4!] \times 2!}_{\text{特定男女相鄰}} = 648 - 192 = 456$$

三男不在老師同一側

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組

瘦長的塔因為年代久遠，塔身容易傾斜。在下方右圖中，以粗黑線條代表塔身，而塔身的長度稱為**塔高**，塔身與鉛直虛線的夾角 θ° 稱為該塔的**傾斜度**($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)，又塔頂至鉛直虛線的距離稱為該塔的**偏移距離**。根據上述資料，回答下列問題。



18. 已知世界上傾斜度最大的摩天大樓坐落於阿布達比，其**傾斜度**達到 18° ，此**傾斜度**換算成徑(或弧度)為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{\pi}{36}$ (2) $\frac{\pi}{18}$ (3) $\frac{\pi}{20}$ (4) $\frac{\pi}{10}$ (5) $\frac{\pi}{8}$

【111 年學測數 B】

答：(4)

解： $18^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$ (徑)

19. 中國虎丘塔、護珠塔與義大利的比薩斜塔是三座著名斜塔，它們的**塔高**分別為 48、19 與 57 (公尺)，**偏移距離**分別為 2.3、2.3 與 4 (公尺)，塔的**傾斜度**分別記為 θ_1° 、 θ_2° 與 θ_3° 。試比較 θ_1 、 θ_2 與 θ_3 三數的大小關係。

【111 年學測數 B】

答： $\theta_2 > \theta_3 > \theta_1$

解： $\left. \begin{array}{l} \sin \theta_1 = \frac{2.3}{48} = 0.04791\dots \\ \sin \theta_2 = \frac{2.3}{19} = 0.12105\dots \\ \sin \theta_3 = \frac{4}{57} = 0.07017\dots \end{array} \right\} \sin \text{ 為增函數，故 } \theta_2 > \theta_3 > \theta_1$

20. 假設有塔高相等的兩座鐵塔，它們的**傾斜度** α° 、 β° 分別滿足 $\sin \alpha^\circ = \frac{1}{5}$ 與 $\sin \beta^\circ = \frac{7}{25}$ 。

已知兩座鐵塔的**偏移距離**相差 20 公尺，試求它們的塔頂到地面之距離相差多少公尺_____。

【111 年學測數 B】

答： $100\sqrt{6} - 240$

解： $l \sin \beta^\circ - l \sin \alpha^\circ = l \left(\frac{7}{25} - \frac{1}{5} \right) = 20 \Rightarrow l = 250$

所求： $l \cos \alpha^\circ - l \cos \beta^\circ = l \left(\frac{\sqrt{24}}{5} - \frac{24}{25} \right) = 50\sqrt{24} - 240$