

111 年大學入學學力測驗數學(數 A) 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

1. 某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球(可為同一口味)共有幾種方法？

(1) 101 (2) 105 (3) 115 (4) 120 (5) 225。

【111 年學測數 A】

答：(4)

解： $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} \geq 100 \Rightarrow n \geq 15$ ，所求 $= C_1^{15} + C_2^{15} = 15 + 105 = 120$

2. 某品牌計算機在計算對數 $\log_a b$ 時需按 $\boxed{\log} \boxed{(\} \boxed{a} \boxed{,} \boxed{b} \boxed{)}$ 。

某生在計算 $\log_a b$ 時(其中 $a > 1$ 且 $b > 1$)順序弄錯，誤按 $\boxed{\log} \boxed{(\} \boxed{b} \boxed{,} \boxed{a} \boxed{)}$ ，所得為正確值的 $\frac{9}{4}$ 倍。試選出 a 、 b 間的關係式。

(1) $a^2 = b^3$ (2) $a^3 = b^2$ (3) $a^4 = b^9$ (4) $2a = 3b$ (5) $3a = 2b$ 。

【111 年學測數 A】

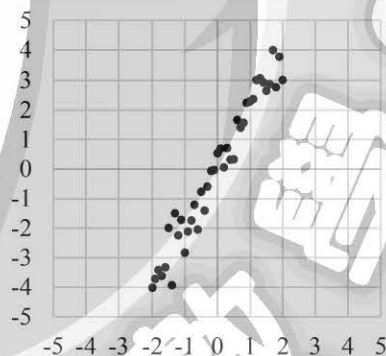
答：(1)

解： $\log_b a = \frac{9}{4} \log_a b \Rightarrow (2 \log a)^2 = (3 \log b)^2 \Rightarrow \log a^2 = \log b^3 \Rightarrow a^2 = b^3$

3. 在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。附圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？

(1) $y = 2x$ (2) $y = -2x$ (3) $y = -x$

(4) $y = \frac{x}{2}$ (5) $y = -\frac{x}{2}$ 。



【111 年學測數 A】

答：(5)

解：原數據呈現斜率近似 $+2$ ，故投影到斜率近似 $-\frac{1}{2}$ 時變異數最小

4. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項 a_1 與公差 d 皆為正數，且 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 依序也成等差數列。試選出數列 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 的公差。

(1) $\log d$ (2) $\log \frac{2}{3}$ (3) $\log \frac{3}{2}$ (4) $\log 2d$ (5) $\log 3d$ 。

【111 年學測數 A】

答：(3)

解： $\log a_1 + \log(a_1 + 5d) = 2 \times \log(a_1 + 2d) \Rightarrow a_1(a_1 + 5d) = (a_1 + 2d)^2 \Rightarrow a_1 = 4d$

$$\text{故公差} = \log \frac{a_1 + 2d}{a_1} = \log \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 2d} = \log \frac{3}{2}$$

5. 已知某地區有 30% 的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80%，將未染病者判為陰性的機率則為 60%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為 P ；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為 P' 。試問 $\frac{P}{P'}$ 最接近哪一選項？

(1) 7 (2) 8 (3) 9 (4) 10 (5) 11。

【111 年學測數 A】

答：(2)

解：有病 30% $\begin{cases} \text{判為陽性 80\%} \\ \text{判為陰性 20\%} \end{cases}$
沒病 70% $\begin{cases} \text{判為陽性 40\%} \\ \text{判為陰性 60\%} \end{cases}$

$$P = \frac{30\% \times 20\%}{30\% \times 20\% + 70\% \times 60\%} = \frac{1}{8}, \quad P' = \frac{30\% \times (20\%)^3}{30\% \times (20\%)^3 + 70\% \times (60\%)^3} = \frac{1}{64}$$

$$\frac{P}{P'} = 8$$

6. 設坐標平面上兩直線 L_1 、 L_2 的斜率皆為正，且 L_1 、 L_2 有一夾角的平分線斜率為 $\frac{11}{9}$ 。

另一直線 L 通過點 $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ 且與 L_1 、 L_2 所圍的有界區域為正三角形，試問 L 的方程式為下列哪一選項？

- (1) $11x - 9y = 19$ (2) $9x + 11y = 25$ (3) $11x + 9y = 25$
(4) $27x - 33y = 43$ (5) $27x + 33y = 65$ 。

【111 年學測數 A】

答：(5)

解： L 的斜率 $-\frac{9}{11}$ ，且過 $\left(2, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 9x + 11y = \frac{65}{3} \Rightarrow 27x + 33y = 65$

二、多選題（占 30 分）

7. 設整數 n 滿足 $|5n - 21| \geq 7|n|$ 。試選出正確的選項。

- (1) $|5n - 7n| \geq 21$ (2) $-1 \leq \frac{7n}{5n - 21} \leq 1$ (3) $7n \leq 5n - 21$

- (4) $(5n - 21)^2 \geq 49n^2$ (5) 滿足題設不等式的整數 n 有無窮多個。

【111 年學測數 A】

答：(2)(4)

解： $|5n - 21|^2 \geq |7n|^2 \Rightarrow (12n - 21)(2n + 21) \leq 0$

$$\Rightarrow -\frac{21}{2} \leq n \leq \frac{7}{4} \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} n = -10, -9, -8, \dots, 0, 1$$

8. 坐標平面上， $\triangle ABC$ 三頂點的坐標分別為 $A(0,2)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(4,1)$ ，試選出正確的選項。

(1) $\triangle ABC$ 的三邊中， \overline{AC} 最長 (2) $\sin A < \sin C$ (3) $\triangle ABC$ 為銳角三角形

(4) $\sin B = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

(5) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑比 2 小。

【111 年學測數 A】

答：(1)(4)

解：(1) $\overline{AB} = \sqrt{5}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{10}$ ， $\overline{AC} = \sqrt{17}$ （最長）

(2) $\because a > c \therefore \sin A > \sin C$

(3) $\because b^2 > a^2 + c^2 \therefore$ 鈍角三角形

(4) $\cos B = \frac{10+5-17}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{50}} \Rightarrow \sin B = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

(5) $\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{17}}{2 \times \frac{7\sqrt{2}}{10}} \approx 2.09 > 2$

9. 已知 P 為 $\triangle ABC$ 內一點，且 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ，其中 a 、 b 為相異實數。

設 Q 、 R 在同一平面上，且 $\overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AR} = a\overrightarrow{AB} + (b-0.05)\overrightarrow{AC}$ 。

試選出正確的選項。

(1) Q 、 R 也都在 $\triangle ABC$ 內部 (2) $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$ (3) $\triangle ABP$ 面積 = $\triangle ACQ$ 面積

(4) $\triangle BCP$ 面積 = $\triangle BCQ$ 面積 (5) $\triangle ABP$ 面積 > $\triangle ABR$ 面積。

【111 年學測數 A】

答：(3)(4)

解： $P \in \triangle ABC$ 內部，表 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a+b < 1$

(1) 故 Q 必在 $\triangle ABC$ 內部，但 R 不確定

(2) $|\overrightarrow{AP}|^2 = a^2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2ab\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + b^2|\overrightarrow{AC}|^2$
 $|\overrightarrow{AQ}|^2 = b^2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2ab\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + a^2|\overrightarrow{AC}|^2$
 不能確定 $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$

(3) $\triangle ABP = \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AP}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{b\overrightarrow{AC}} \right\| = \frac{b}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} \right\|$

$\triangle ACQ = \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AQ}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AC}}{b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AC}}{b\overrightarrow{AB}} \right\| = \frac{b}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} \right\|$

(4) 承(3)，可知 $\triangle ACP = \triangle ABQ$

故 $\triangle BCP = \triangle ABC - \triangle ABP - \triangle ACP = \triangle ABC - \triangle ACQ - \triangle ABQ = \triangle BCQ$

(5) $\triangle ABR = \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AR}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{a\overrightarrow{AB} + (b-0.05)\overrightarrow{AC}} \right\|$
 $= \frac{1}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{(b-0.05)\overrightarrow{AC}} \right\| = \frac{|b-0.05|}{2} \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} \right\|$

不確定 $\triangle ABP$ 與 $\triangle ABR$ 之大小

10. 給定一實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ 。令 $g(x) = f(-x) - 3$ ，
已知 $y = g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1, 0)$ 且 $g(-1) < 0$ 。試選出正確的選項。

- (1) $g(x) = 0$ 有三相異整數根 (2) $a < 0$
(3) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-1, -3)$ (4) $f(100) < 0$
(5) $y = f(x)$ 的圖形在點 $(-1, f(-1))$ 附近會近似於一條斜率為 a 的直線。【111 年學測數 A】

答：(1)(2)

解：(1)(2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$

$$g(x) = f(-x) - 3 = -ax^3 + bx^2 - cx, \text{ 表必過 } (0, 0)$$

又 $y = g(x)$ 對稱中心為 $(1, 0)$ ，表亦過 $(2, 0)$

$$\text{故 } g(x) = -a(x-0)(x-1)(x-2) = -ax^3 + 3ax^2 - 2ax$$

$$\text{亦即 } b = 3a, c = 2a \xrightarrow{g(-1) < 0} a < 0$$

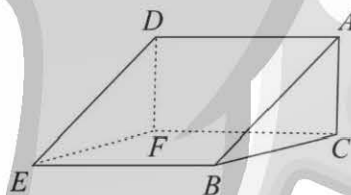
$$(3) f(x) = ax^3 + 3ax^2 + 2a + 3 = a(x+1)^3 - a(x+1) + 3, \text{ 表對稱中心 } (-1, 3),$$

(4) 但不確定 a 值，所以不能確定 $f(100)$ 正負

(5) 在 $(-1, f(-1))$ 處一次近似 $y = -a(x+1) + 3$

11. 附圖為一個積木的示意圖，其中 ABC 為一直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 6$ ，
且 $ADEB$ 與 $ADFC$ 皆為矩形。試選出正確的選項。

- (1) 將此積木沿平面 ACE 切下，可切得兩個四面體
(2) 平面 $ADEB$ 與 $ADFC$ 所夾銳角大於 45°
(3) $\angle CEB < \angle AEB$
(4) $\tan \angle AEC < \sin \angle CEB$
(5) $\angle CEB < \angle AEC$ 。



【111 年學測數 A】

答：(2)(3)(4)

解：(1) 應得一四角錐，一三角錐（四面體）

$$(2) \text{ 由兩面角定義，夾角 } \sin \angle BAC = \frac{5}{\sqrt{61}} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ, \text{ 故 } \angle BAC > 45^\circ$$

$$(3) \cos \angle CEB = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} > \cos \angle AEB = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \Rightarrow \angle CEB < \angle AEB$$

$$(4) \tan \angle AEC = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} < \sin \angle CEB = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}}$$

$$(5) \sin \angle AEC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} < \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \sin \angle CEB \Rightarrow \angle AEC < \angle CEB$$

12. 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $g(x)$ 是首項係數為正的二次式。

已知 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $g(x)$ ，且 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點。

試選出不可能是 $y = g(x)$ 圖形頂點的 y 坐標之選項。

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) 2 (5) π 。

【111 年學測數 A】

答：(1)(2)

解： $[g(x)]^2 = f(x)Q(x) + g(x) \Rightarrow g(x)[g(x)-1] = f(x)Q(x)$
 $\therefore y = f(x)$ 與 x 軸無交點且 $g(x)$ 領導係數為正 \therefore (1)(2) 不可能

三、選填題 (占 25 分)

13. 有一款線上遊戲推出「十連抽」的抽卡機制，「十連抽」意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次「十連抽」需用 1500 枚代幣，抽中金卡的機率在前九次皆為 2%，在第十次為 10%。今某生有代幣 23000 枚，且不斷使用「十連抽」，抽到不能再抽為止。則某生抽到金卡張數的期望值為_____張。

【111 年學測數 A】

答：4.2

解： $\left\lfloor \frac{23000}{1500} \right\rfloor = \lfloor 15.33\ldots \rfloor = 15$ $E(X) = \left[9 \times \frac{2}{100} + 1 \times \frac{10}{100} \right] \times 15 = 4.2$

14. 已知 a 、 b 為實數，且方程組 $\begin{cases} ax+5y+12z=4 \\ x+ay+\frac{8}{3}z=7 \\ 3x+8y+az=1 \end{cases}$ 恰有一組解，又此方程組經過一系列

的高斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array} \right]$ 。

則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

【111 年學測數 A】

答： $a = 2$ ， $b = \frac{1}{2}$

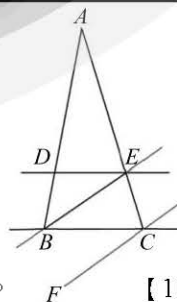
解： $\begin{cases} ax+5y+12z=4 \\ x+ay+\frac{8}{3}z=7 \\ 3x+8y+az=1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} z=0 \\ 3x+8y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}} \begin{cases} x=27 \\ y=-10 \\ z=0 \\ a=2 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

15. 如圖，王家有塊三角形土地 $\triangle ABC$ ，其中 $BC = 16$ 公尺。

政府擬徵收其中梯形 $DBCE$ 部分，開闢以直線 DE ， BC 為邊線的馬路，其路寬為 h 公尺，這讓王家土地只剩原有

面積的 $\frac{9}{16}$ 。經協商，改以開闢平行直線 BE ， FC 為邊線

的馬路，且路寬不變，其中 $\angle EBC = 30^\circ$ ，則只需徵收 $\triangle BCE$ 區域。依此協商，王家剩餘的土地 $\triangle ABE$ 有_____平方公尺。



【111 年學測數 A】

答：192

解： $\because d(\overline{DE}, \overline{BC}) = d(\overline{BE}, \overline{FC}) \quad \therefore \triangle BCE$ 為等腰 \triangle
 $\Rightarrow \overline{BC} = \overline{BE} = 16, \angle EBC = 30^\circ, d(\overline{DE}, \overline{BC}) = 8$
 $\triangle ADE = \frac{9}{16} \triangle ABC \Rightarrow \overline{DE} = \frac{3}{4} \overline{BC} = 9$
 $\triangle ABC$ 面積 $= (12+16) \times 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{7} = 256$
 $\triangle ABE$ 面積 $= 256 - \frac{1}{2} \times 16 \times 16 \times \sin 30^\circ = 192$

16. 坐標空間中，平面 $x - y + 2z = 3$ 上有兩相異直線 $L: \frac{x}{2} - 1 = y + 1 = -2z$ 與 L' 。

已知 L 也在另一平面 E 上，且 L' 在 E 的投影與 L 重合。則 E 的方程式為_____。

【111 年學測數 A】

答： $x - 3y - 2z = 5$

解： $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-\frac{1}{2}}, P(2, -1, 0) \in L, \vec{L} = (4, 2, -1)$

$F: x - y + 2z = 3, \vec{F} = (1, -1, 2)$

$\vec{E} \parallel \vec{L} \times \vec{F} = (3, -9, -6) \parallel (1, -3, -2), P \in E, \text{故 } E: x - 3y - 2z = 5$

17. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $(-1, 2, 1), (-4, 1, 3), (2, 0, -3)$ ，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為_____。

【111 年學測數 A】

答： 21

解： $A(-1, 2, 1), B(-4, 1, 3), C(2, 0, -3), D(\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-3, -1, 2) \times (3, -2, -4) = (8, -6, 9)$

故平面 $ABC: 8x - 6y + 9z + 11 = 0$ 且 $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{181}$

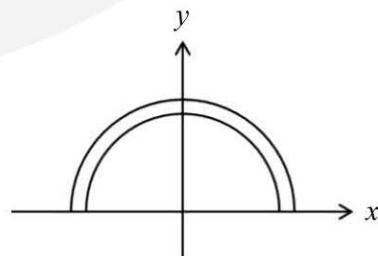
$d(D, \text{平面 } ABC) = \frac{|8\cos\theta - 6\sin\theta + 11|}{\sqrt{181}} \leq \frac{|10 + 11|}{\sqrt{181}} = \frac{21}{\sqrt{181}}$

所求最大體積 $= \sqrt{181} \times \frac{21}{\sqrt{181}} = 21$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組

坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2 + y^2 = 3$ 的外部與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R 。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 $C_1: x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$ 、 $C_2: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$ 上移動。開始時掃描棒黑端在點 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，白端在 C_2 的點 B 。接著黑、白兩端各沿著



C_1 、 C_2 逆時針移動，直到白端碰到 C_2 的點 $B'(-2,0)$ 便停止掃描。

18. 試問點 B 的坐標為下列哪一選項？（單選題）

- (1) $(0,2)$ (2) $(1,\sqrt{3})$ (3) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ (4) $(\sqrt{3},1)$ (5) $(2,0)$

【111 年學測數 A】

答：(4)

解： $A(\sqrt{3},0)$ ， $B(2\cos\theta,2\sin\theta)$ ， $\overline{AB}=1 \Rightarrow \overline{AB}^2=1$

$$\Rightarrow (2\cos\theta - \sqrt{3})^2 + (2\sin\theta)^2 = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

則 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 表 $B(\sqrt{3},1)$

19. 令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A', B' 。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域 R ；並於求解區內求 $\cos\angle OA'B'$ 及點 A' 的極坐標。

【111 年學測數 A】

答： $\cos\angle OA'B'=0$ ， $A'[\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}]$

解： $B'(-2,0)$ ， $A'(\sqrt{3}\cos\phi, \sqrt{3}\sin\phi)$ ， $\overline{A'B'}=1 \Rightarrow \overline{A'B'}^2=1$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}\cos\phi + 1)^2 + (\sqrt{3}\sin\phi)^2 = 1 \Rightarrow \cos\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

則 $\sin\phi = \frac{1}{2}$ ，表 $A'(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

故極坐標表示法 $A'[\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}]$ ， $B'[2, \pi]$

而 $\overline{OA'}=\sqrt{3}$ ， $\overline{OB'}=2$ ， $\overline{A'B'}=1$ ， $\angle OA'B'=90^\circ \Rightarrow \cos\angle OA'B'=0$

20. 〈承 19 題〉令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求 Ω 與 R 的面積。

【111 年學測數 A】

答： $R = \frac{5}{12}\pi$ ， $\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$

解： $\Omega = [\text{扇形 } O - \widehat{BY}] + [\Delta O - AB] - [\text{扇形 } O - \widehat{AY}]$

$$= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sin 30^\circ - \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$$

$R - \Omega = [\text{扇形 } O - \widehat{B'Y}] - [\text{扇形 } O - \widehat{A'Y}] - [\Delta O - A'B']$

$$= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sin 30^\circ = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故 $R = \frac{5}{12}\pi$