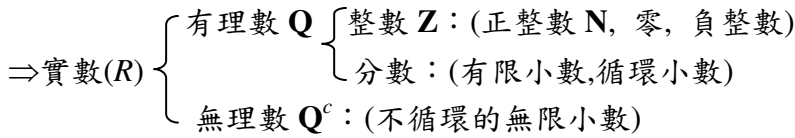


【第一冊】

1. 數系 ( $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ )



2. 算幾不等式： $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$       【例】若  $a, b > 0$ ，且  $ab = 6$ ，則  $3a+2b$  的最小值=12

3. 乘法公式

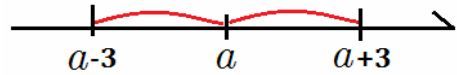
(1)  $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

(2)  $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = \underline{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

【例】若  $a+b=8$ ， $ab=3$ ，求(1)  $a^2+b^2$     (2)  $a^3+b^3$       Ans:(1)58    (2)440

4. 絕對值：(1)  $|x-a| < 3 \Leftrightarrow \underline{(a-3) < x < (a+3)}$ 。



(2)  $|x-a| \geq 3 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 指數：(1)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$     (2)  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$     (3)  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$     (4)  $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

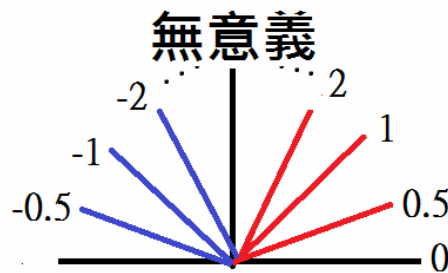
對數： $10^x = a \Leftrightarrow x = \log a$       EX： $\log 10 = 1$ ， $\log 100 = 2$ ， $\log 1000 = 3$

(1)  $\log 1 = 0$     (2)  $\log 10^x = x$     (3)  $10^{\log a} = a$     (4)  $(10^m)^{\log a} = a^m$

【例 7】求值：(1)  $1000^{\log 2}$     (2)  $\log 100^{\frac{5}{2}}$       Ans:(1)8    (2)5

6. 直線：

(1) 斜率  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



(2) 點斜式：過  $P(x_0, y_0)$ ，斜率為  $m$  之直線  $L$ ： $\underline{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$

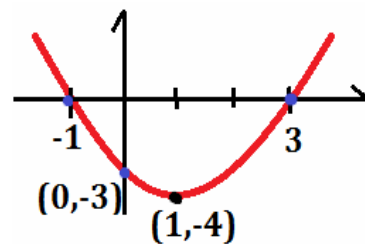
(3) 截距式： $x$  軸截距  $a$ ， $y$  軸截距  $b$  之直線  $L$ ： $\underline{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

(4) 直線  $L: ax+by+c=0$ ，(1)若  $L_1 // L$ ，設  $\underline{L_1: ax+by+k=0}$

(2)若  $L_2 \perp L$ ，設  $\underline{L_2: bx-ay+k=0}$

7. 二次函數：

例：  $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$



(1) 與  $x$  軸交點： $(-1, 0), (3, 0)$

(2) 與  $y$  軸交點： $(0, -3)$

8. (1) 餘式定理：  $f(x)$  除以  $(x-c)$  的餘式  $r = f(c)$

(2) 因式定理：若  $x-c$  是  $f(x)$  的因式，則  $f(c) = 0$

【例】  $f(x) = x^{59} + 7x^{22} - 4x^8 + 5$  除以  $x-1$  的餘式 = 9

【例】 求值： $12^5 - 7 \cdot 12^4 - 58 \cdot 12^3 + 16 \cdot 12^2 - 465 \cdot 12 + 100 =$  280

9. 牛頓定理：若整係數  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 40 = 0$  有四個相異正整數根，求此四根。

Ans: 1, 2, 4, 5

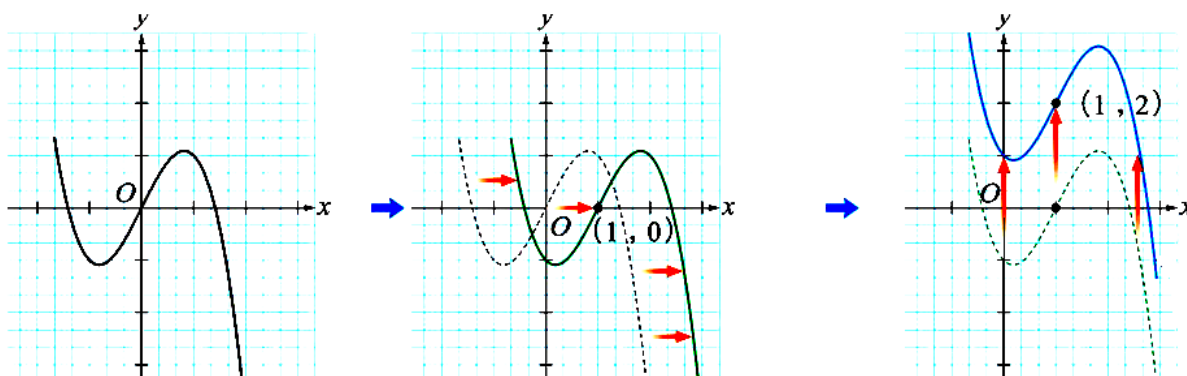
10. 不等式：(1)  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$  答： $x \geq 3, x \leq 1$  (2)  $x(x-1)(x-3)(x-5) > 0$  答： $x < 0, 1 < x < 3, x > 5$

(大分)

(小連)

11. 三次函數： $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x + \square)^3 + p(x + \square) + k$  <背>  $\square = \frac{b}{3a}$

EX:  $y = -x^3 + 2x \xrightarrow{\text{右移1單位}} y = -(x-1)^3 + 2(x-1) \xrightarrow{\text{上移2單位}} y = -(x-1)^3 + 2(x-1) + 2$



【例】 已知  $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$ ，則  $y = f(x)$  的圖形

(1) 其對稱中心為  $(-1, -2)$

(2) 在  $x = -1$  附近近似於直線  $y = -3x - 5$

12. 線性規劃：最佳解(Max, min)一般出現在 端點，邊界

【例 1】 設  $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y - 12 \leq 0, x + y - 2 \geq 0$ ，求下列最大值與最小值：

(1)  $x - y + 1$

(2)  $\frac{y+1}{x+2}$

Ans: (1)  $M=5, m=-5$  (2)  $M=\frac{7}{2}, m=\frac{1}{6}$

13. 圓心  $(h, k)$ ，半徑為  $r \Rightarrow$  圓的標準式： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

※距離公式：點  $P(X_0, Y_0)$ ，直線  $L: ax + by + c = 0 \Rightarrow$  距離  $d(P, L) = \frac{|a \cdot X_0 + b \cdot Y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

【例】設直線  $L: x + y + k = 0$ ，圓  $C: x^2 + y^2 + 6x + 6y + 10 = 0$ ，若  $L$  和圓  $C$  相切，求  $k$  值。

Ans:  $k = 2$  或  $10$

【第二冊】

1. 遞迴數列：數列  $\langle a_n \rangle$  中，第  $n$  項  $a_n$  可由前幾項表示。

(I) 累加型： $a_n = a_{n-1} + f(n)$  【例】 $n$  條直線最多可將平面分成  $a_n$  個區域，則  $a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$

(II) 累積型： $a_n = f(n) \cdot a_{n-1}$  【例】數列  $\langle a_n \rangle$ ，若  $a_1 = 5$ ， $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot a_n$ ，求  $a_{20} = \frac{1}{4}$

2. 等差數列：(1)  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = a_5 + (n-5) \cdot d$

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2}$$

$$(3) \text{若 } a, b, c \text{ 成等差，則等差中項 } b = \frac{a+c}{2}。$$

【例】 $\langle a_n \rangle$  為等差數列，其一般項  $a_n = -2n + 3$ ，首項  $a_1 = 1$ ，公差  $d = -2$

【例】試求級數  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 19^2 - 20^2 + 21^2$  之總和。 Ans: 231

3. 等比數列：

$$(1) a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = a_5 \cdot r^{n-5}。$$

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$(3) \text{若 } a, b, c \text{ 成等比，則等比中項 } b = \pm \sqrt{ac}。$$

【例】若一等比級數的首項為 3，公比為 4，和為 4095，則此級數共有多少項？ Ans: 6

$$4. (1) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{【例】} \sum_{k=1}^{20} k^2 = 2485$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{10}{11}$$

【例】試求：(1)  $1+3+5+7+\dots+(2n-1)$  (2)  $1 \times 13 + 4 \times 11 + 7 \times 9 + 10 \times 7 + \dots$  加至第 20 項

Ans: (1)  $n^2$  (2)  $-7530$

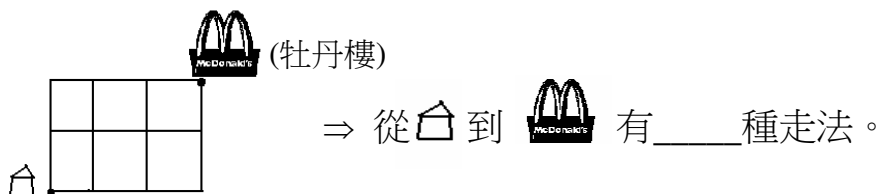
5. 計數原理：(1) 一一對應原理 (2) 加法、乘法原理 (3) 樹狀圖

【例】有 21 支隊伍參加單淘汰籃球比賽(沒和局)。請問，共要比幾場才能產生冠軍？

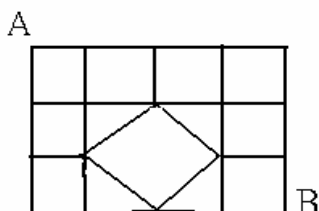
Ans：20 場

【例】小黑與 4 位同學互相傳球，若小黑傳球出去後經 4 次傳球，球又回到小黑手上，則有 52 種傳法。(可畫樹狀圖求解)

6. 捷徑：



【例】由 A 走捷徑到 B，共有 9 種走法。



7. (1) 階乘： $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$  EX：有 5 個人，A, B, C, D, E

(2) 排列： $P_3^5 = 5 \times 4 \times 3$

(3) 選取： $C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{\dots}$

※  $0! = P_0^n = C_0^n = 1$

EX：A, A, A, D, E 排一列，有  $\frac{5!}{3!}$  種。

【例】甲、乙、丙、丁、戊，共五人排成一列，求下列方法數：

(1) 甲、乙相鄰 (2) 甲、乙、丙相鄰 (3) 甲、乙不相鄰 (4) 甲在乙前方，且乙在丙前方

Ans:(1)48 (2)36 (3)72 (4)20

【例】有 5 種不同的酒，倒入 3 個酒杯，求下列方法數：

(1) 杯子相同，每種酒最多倒一次： $C_3^5$

(2) 杯子不同，每種酒最多倒一次： $P_3^5$

(3) 杯子不同，每種酒不限倒一次： $5^3$

(4) 杯子不同，每種酒不限倒一次，且至少一杯為啤酒： $5^3 - 4^3$  (沒啤酒)

### 8. 二項式：

巴斯卡三角形：

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

$$\text{※ (1) } (a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(2) C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$(3) C_0^n + C_2^n + C_4^n + \dots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \dots = \frac{2^n}{2}$$

【例】 $(2x-3y)^8$  展開式中，則  $x^3y^5$  的係數 = -108864

9. 古典機率：發生事件 A 的機率  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$$\text{※ } 0 \leq P(A) \leq 1$$

【例】袋中有 6 顆紅球、4 顆白球。求

(1) 同時取 3 球，恰為同色的機率為  $\frac{1}{5}$

(2) 逐一取出全部的球，紅球先被取完的機率為  $\frac{2}{5}$

【例】畢業旅行，甲、乙、丙、... 等 12 人平分住三間房間，則甲、乙、丙皆不同房的機率為  $\frac{16}{55}$ 。

10. 條件機率：在發生 A 事件下，B 發生的機率

$$\text{記為 } P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} =$$

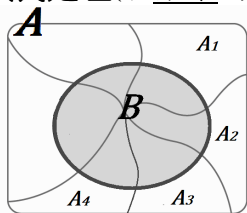
【例】擲一骰子兩次，已知兩次點數和為 8 的條件下，求

(1) 其中一顆骰子為 2 點的機率為  $\frac{2}{5}$  (2) 第一次點數大於第二次點數的機率為  $\frac{2}{5}$

11. 獨立事件：A, B 事件彼此不相影響  $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

【例】阿杜打靶命中率為 40%，欲使靶面被打中的機率超過 0.9，那至少要打幾發？ Ans：5 發  
( $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ )

12. 貝氏定理(以結果為前提的一種條件機率)



【例】甲乙丙三人射擊的命中率分別為  $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ ，

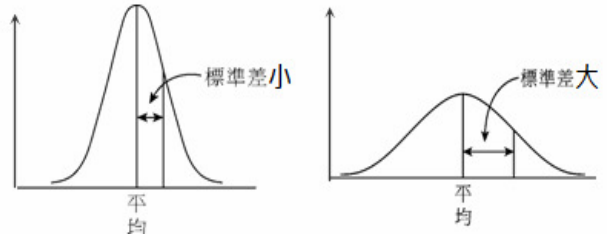
今三人向同靶各射擊一發子彈，求

(1) 此靶會被射中的機率 =  $\frac{9}{10}$

(2) 靶面恰中一彈的機率 =  $\frac{5}{12}$

(3) 已知靶面恰中一彈，求其為甲射中的機率 =  $\frac{4}{25}$

13. 標準差  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}}$

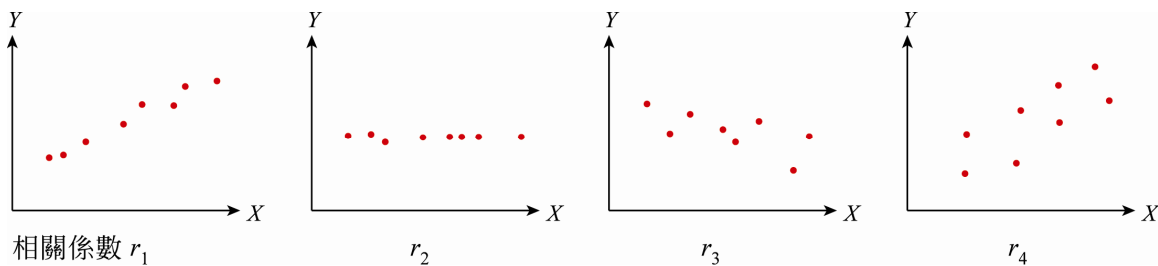


★性質：若  $y_i = ax_i + b$ ，則(1)平均  $\bar{y} = a\bar{x} + b$  (2)標準差  $\sigma_y = |a| \cdot \sigma_x$

【例】兩筆資料  $X, Y$  的關係為  $y_i = 3x_i - 2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，已知標準差  $\sigma_x = 6$ ，且  $\bar{y} = 148$ ，則平均  $\bar{x} = \underline{50}$ ，標準差  $\sigma_y = \underline{18}$ 。

14. 相關係數  $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$  ※(1)  $-1 \leq r \leq 1$  (2)  $|r|$  越大，相關程度越大

【例】將下列各散布圖的相關係數  $r_1, r_2, r_3, r_4$  由大到小排列。 Ans:  $r_1 > r_4 > r_2 > r_3$



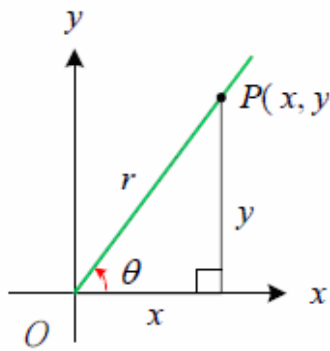
【例】二變量  $X, Y$  之相關係數  $r_{X,Y} = 0.7$ ，又變量  $X$  之算數平均數  $\bar{X} = 10$ ，標準差  $\sigma_X = 4$ ，求  
 (1) 平均  $3X + 5$  (2) 標準差  $\sigma_{3X+5}$  (3) 相關係數  $r_{3X+5, 5Y-2}$  Ans: (1)35 (2)12 (3)0.7

15. 迴歸直線  $L: y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \cdot (x - \bar{x})$  ※(1) 直線  $L$  過  $(\bar{x}, \bar{y})$  (2) 斜率  $m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

【例】紙張的張力強度  $Y$  (磅/平方英吋) 和所含硬木比例  $X$  (百分比) 關係的實驗，得到如下 5 組數據：  
 求(1)相關係數 (2)  $Y$  對  $X$  的迴歸直線方程式 Ans: (1)0.725 (2)  $y - 30 = \frac{290}{100}(x - 8)$

|     |   |    |    |    |    |
|-----|---|----|----|----|----|
| $X$ | 3 | 4  | 7  | 11 | 15 |
| $Y$ | 5 | 40 | 15 | 35 | 55 |

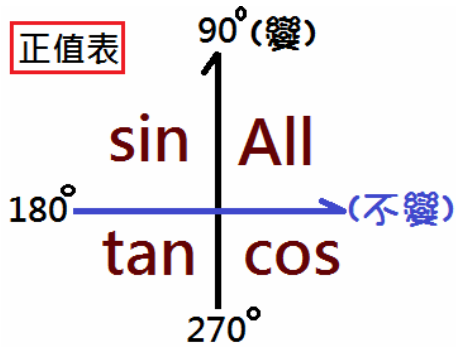
16. 三角函數：



$$\sin \theta = \frac{\text{對}}{\text{斜}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{鄰}}{\text{斜}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{對}}{\text{鄰}} = \frac{y}{x} \text{ (斜率)}$$



【例】完成下表：

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
|     | 30° | 45° | 60° |
| sin |     |     |     |
| cos |     |     |     |
| tan |     |     |     |
| cot |     |     |     |

【例】求值

(1)  $\sin 120^\circ =$  \_\_\_\_\_

(2)  $\sin 1050^\circ =$  \_\_\_\_\_

$\cos 120^\circ =$  \_\_\_\_\_

$\cos 1050^\circ =$  \_\_\_\_\_

$\tan 120^\circ =$  \_\_\_\_\_

$\tan 1050^\circ =$  \_\_\_\_\_

Ans: (1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}$  (2)  $-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}}$

17. (1)  $\pi$  (弧度) = 180° (2) 1 (弧度)  $\doteq 57.3^\circ$  【例】 $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ =$

18.  $\theta$  的同界角 =  $\theta \pm 360^\circ \cdot n = \theta \pm 2\pi \cdot n$

【例】若  $950^\circ$  的最大負同界角為  $a$  及最小正同界角為  $b$ ，求  $(a, b) = (-130^\circ, 230^\circ)$

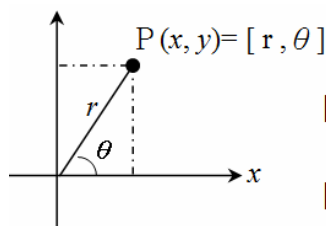
19. 平方關係： $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow (\sin\theta \pm \cos\theta)^2 = 1 \pm 2\sin\theta\cos\theta$

【例】若  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ， $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$ ，求  $\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

20. 直角坐標  $P(x, y) \Leftrightarrow$  極坐標  $P[r, \theta]$

(1)  $P(x, y) = [r, \theta]$ ，其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\tan \theta = \frac{y}{x}$

(2)  $P[r, \theta] = (x, y)$ ，其中  $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$



【例】 $(-1, \sqrt{3}) = [2, 120^\circ]$

【例】 $[3, -90^\circ] = (0, -3)$

21. (1) 正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(2) 餘弦定理： $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

(3) 面積  $\Delta = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

【例】 $\Delta ABC$ ，三邊長為  $a, b, c$ ，若  $a-2b+c=0$ ，且  $3a+b-2c=0$ ，則  $\sin A : \sin B : \sin C = 3:5:7$

【例】 $\Delta ABC$  三邊  $a=4$ ， $b=6$ ， $c=8$ ，求  $\Delta ABC$  的 (1) 面積 (2) 高  $h_c$  (3)  $\cos A$  (4) 內切圓半徑  $r$

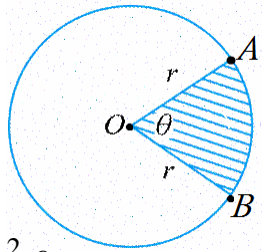
Ans: (1)  $3\sqrt{15}$  (2)  $\frac{3}{4}\sqrt{15}$  (3)  $\frac{7}{8}$  (4)  $\frac{\sqrt{15}}{3}$

【第三冊】

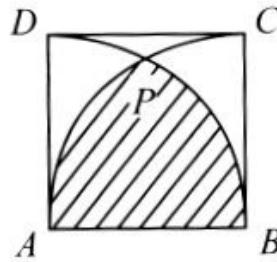
1. 扇形：

(1) 弧長  $\widehat{AB} = r\theta$

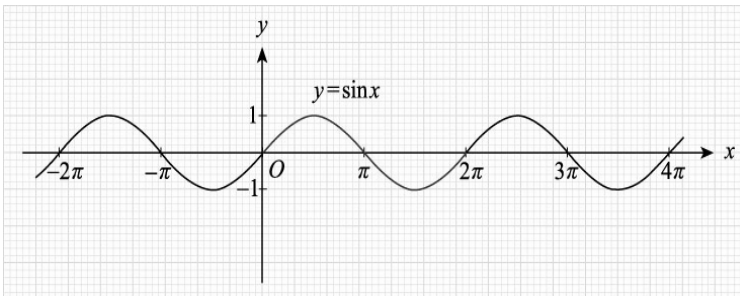
(2) 扇形  $AOB$  面積 =  $\frac{1}{2} r^2 \theta$



【例】邊長為 1 的正方形  $ABCD$ ，分別以  $A, B$  為圓心，半徑為 1 畫弧。則斜線面積 =  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$



2. 正弦  $\sin$  函數的圖形



※  $y = a \cdot \sin(k \cdot x + b) + C$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 振 | 週 | 左 | 上 |
| 幅 | 期 | 右 | 下 |
|   |   | 移 | 移 |

【例】方程式  $\sin x = \log x$  有幾個相異實根？ *Ans:* 3 個

3. (1) 負指數： $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(2) 分數指數：設  $a > 0$ ，則  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

【例】設  $a > 0$ ， $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2$ ，求  $a + a^{-1} = \underline{6}$

【例】 $0 \leq x \leq 2$ ，求  $f(x) = -9^x + 2 \times 3^{x+1} + 3$  的最大值 = 12，最小值 = -24

4. 對數定義： $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

PS：底數  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ；真數  $b > 0$

EX：(1)  $\log_2 8 = 3$  (2)  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$  (3)  $\log 100 = 2$  (4)  $\log_1 2$  無意義 (5)  $\log_2(-4)$  無意義

※對數公式：

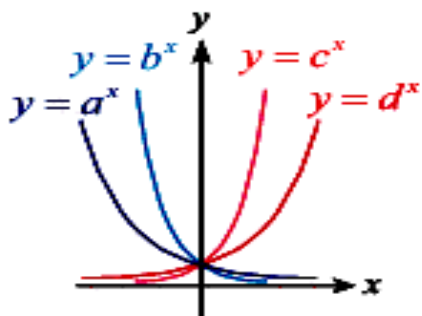
(1)  $\begin{cases} \log x + \log y = \log x \cdot y \\ \log x - \log y = \log \frac{x}{y} \end{cases}$  (2)  $\log x^n = n \cdot \log x$  (3)  $\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}$

【例】求值 (1)  $2\log \frac{5}{3} + 2\log 3 + \frac{1}{2}\log 49 - \log \frac{7}{4} = \underline{2}$

(2)  $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 2\sqrt[3]{4} = \underline{\frac{13}{6}}$

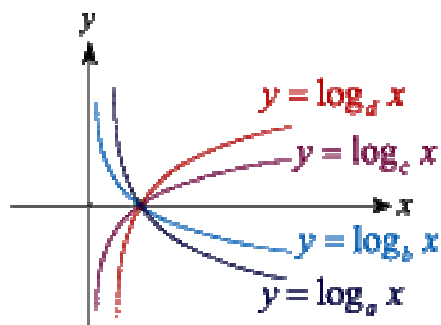


5.圖型：(1)指數  $f(x)=a^x$



$$c > d > 1 > a > b > 0$$

(2)對數  $f(x) = \log_a x$

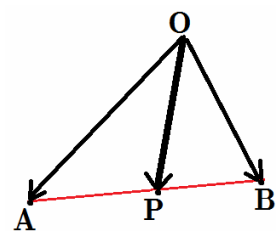


6. 向量加減法：(1)  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  (2)  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$  (後 - 前)

7. 向量  $\vec{OP} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$ ，若  $P, A, B$  共線  $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

$$\text{※若 } \overline{AP} : \overline{BP} = m : n, \text{ 則 } \vec{OP} = \frac{n}{m+n} \cdot \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \vec{OB}$$

【例】若  $P$  點在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AP} : \overline{BP} = 5 : 3$ ，則  $\vec{OP} = \frac{3}{8} \vec{OA} + \frac{5}{8} \vec{OB}$



8. 若  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ， $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，則內積  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

$$\text{※(1) } \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (2) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

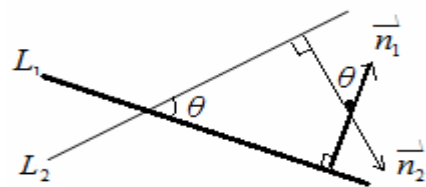
【例】設  $\triangle ABC$  的三頂點坐標分別為  $A(1, 1)$ ， $B(8, 2)$ ， $C(4, 5)$ ，求  $\angle A = 45^\circ$

9. 柯西：  $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geq (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2$

【例】設  $2x + y = 10$ ，求  $x^2 + y^2$  的最小值，及此時  $(x, y)$  之值。 Ans: 20, (4, 2)

10. 法向量  $\vec{n}$ ：直線  $3x + 4y - 7 = 0$  之法向量  $\vec{n} = (3, 4)$

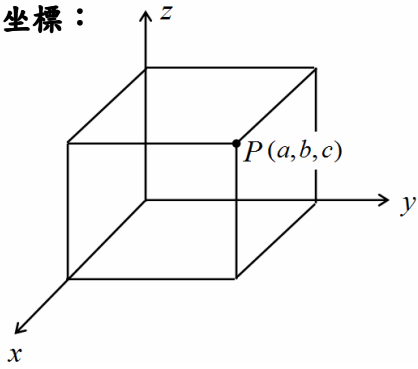
※直線  $L_1$  與  $L_2$  的夾角  $\theta = \vec{n}_1$  與  $\vec{n}_2$  的夾角  $\theta$



【例】求  $L_1: x - 2y + 4 = 0$  與  $L_2: x + 3y + 3 = 0$  所夾之銳角  $\theta$  為  $45^\circ$

【第四冊】

1. 空間坐標：



(1)  $\overline{OP}$  距離 = \_\_\_\_\_

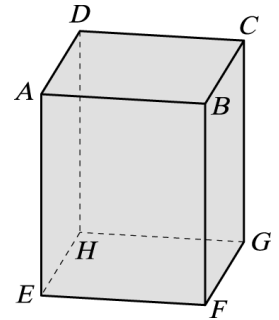
(2)  $P$  點對  $y$  軸の距離 = \_\_\_\_\_

(3)  $P$  點對  $xy$  平面の距離 = \_\_\_\_\_

【例】長方體盒子  $ABCD-EFGH$ ，其中  $\overline{AE}=5$ ， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AD}=1$ ，試求：

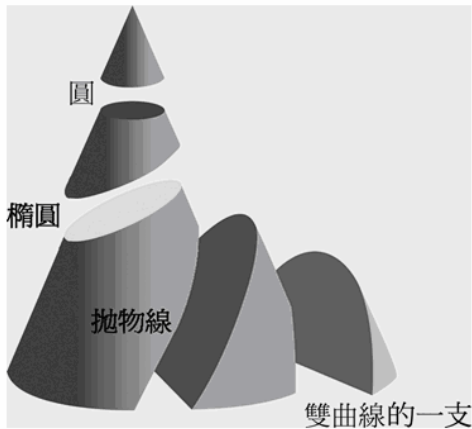
(1) 一隻蜜蜂從  $A$  點飛到  $G$  點，其飛行所經最短距離 =  $\sqrt{35}$

(2) 一隻螞蟻從  $F$  點爬到  $D$  點，其爬行所經最短距離 =  $\sqrt{41}$

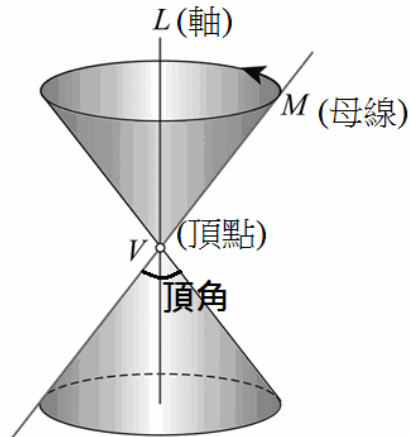


2. 圓錐截痕：

(1)



(2)



【例】如圖。將一支頂角為  $60^\circ$  的手電筒射在牆面上。其發光點  $A$  照射出的光形成一直圓錐面。試問，下列各情形時，照射在牆面上的區域形狀為何種圖形？

(1) 直線  $AB$  垂直牆面時：\_\_\_\_\_

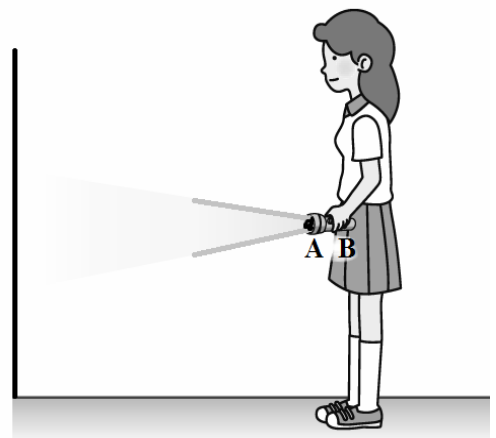
(2) 直線  $AB$  與牆面夾角為  $30^\circ$  時：\_\_\_\_\_

(3) 直線  $AB$  與牆面夾角為  $45^\circ$  時：\_\_\_\_\_

(4) 直線  $AB$  與牆面夾角為  $15^\circ$  時：\_\_\_\_\_

填入：(甲)圓 (乙)橢圓 (丙)拋物線 (丁)雙曲線一支

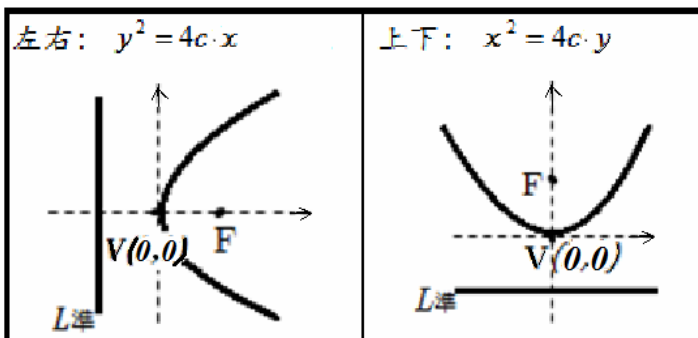
Ans: (1)甲 (2)丙 (3)乙 (4)丁



3. 拋物線上點  $P(x, y)$  滿足  $\overline{PF} = d(P, L)$

※ 焦點  $F$ ，準線  $L$

(1) 焦距  $= \overline{VF} = |c|$  (2) 正焦弦長  $= 4 \cdot |c|$

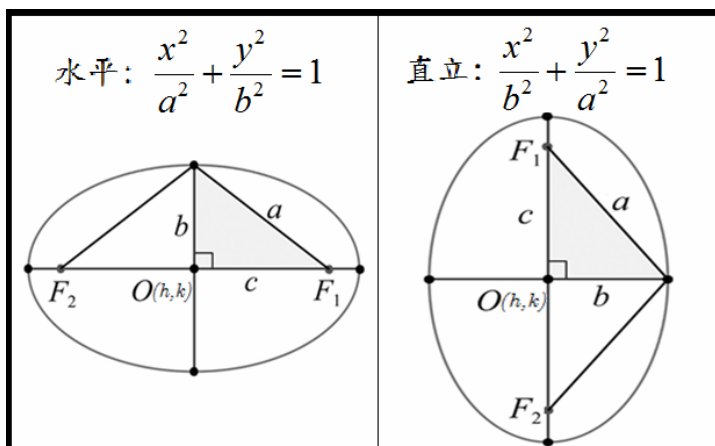


【例】拋物切面之反射燈，燈口直徑 40 公分，燈深 20 公分，求其焦距  $= 5$ 。

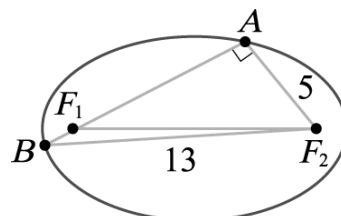
4. 橢圓上的點  $P(x, y)$  滿足  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

※ 長軸  $2a$ ，短軸  $2b$ ，兩焦點  $\overline{F_1F_2} = 2c$

(1)  $a^2 = b^2 + c^2$  (2) 正焦弦長  $= \frac{2b^2}{a}$



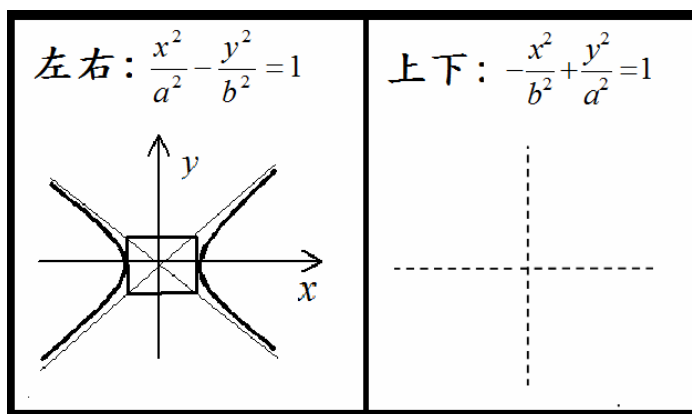
【例】如圖橢圓中， $F_1$  與  $F_2$  為焦點，設有  $A$ 、 $B$  兩點在橢圓上， $\overline{AB}$  通過  $F_1$  且  $\angle A$  為直角。已知  $\triangle ABF_2$  中  $\overline{AF_2} = 5$ ， $\overline{BF_2} = 13$ ，則此橢圓的長軸長為 15。



4. 雙曲線上點  $P(x, y)$  滿足  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$

※ 貫軸  $2a$ ，共軛軸  $2b$ ，兩焦點  $\overline{F_1F_2} = 2c$

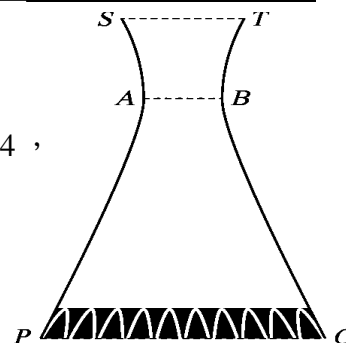
(1)  $c^2 = a^2 + b^2$  (2) 正焦弦長  $= \frac{2b^2}{a}$



【例】附圖是某冷卻塔的截面圖，其圖形為雙曲線且其頸部  $AB$  剛好是

雙曲線的貫軸。已知  $\overline{AB}$ ， $\overline{ST}$  與  $\overline{PQ}$  互相平行， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{ST} = 6$ ， $\overline{PQ} = 14$ ，

且  $\overline{AB}$  與  $\overline{ST}$  相距 5，則  $\overline{AB}$  與  $\overline{PQ}$  的距離為 15



5. 矩陣(直行，橫列)：

例如： $A = [a_{ij}]_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$  的階數為 2 列 3 行

例如：零矩陣：每個元皆為 0，例： $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

例如：二階單位方陣  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. 矩陣乘法： $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ， $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ ， $AB$  才有意義。

說明： $AB = C = [c_{ij}]$ ，其中  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$

【例】設  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ，求 (1)  $AB = \underline{\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}}$  (2)  $BA = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 4 & 8 & -2 \\ 6 & 20 & -10 \end{bmatrix}}$

【例】 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ ，求  $AB = \underline{0}$

7. 矩陣性質：

(1)  $AB = 0$ ，則  $\underline{A=0}$  or  $\underline{B=0}$  不一定成立

(2)  $AB = AC$ ，則  $B = C$  不一定成立

(3) 因為  $AB \neq BA$ ，所以 [I]  $(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$

[II]  $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$

[III]  $(A+B)^n \neq C_0^n A^n + C_1^n A^{n-1}B + C_2^n A^{n-2}B^2 + \dots + C_n^n B^n$

8. 二階反矩陣：若方陣  $A$  的  $\det(A) \neq 0$ ，則存在唯一乘法反矩陣  $A^{-1}$ ，使得  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ 。

※反矩陣公式： $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

【例】求  $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  的反矩陣  $A^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}}$