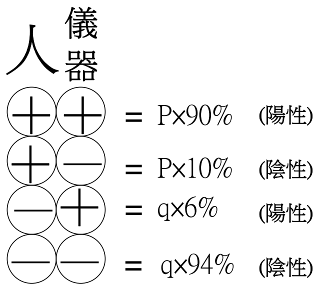
110-全國高中教師聯招 數學試題 詳解整理

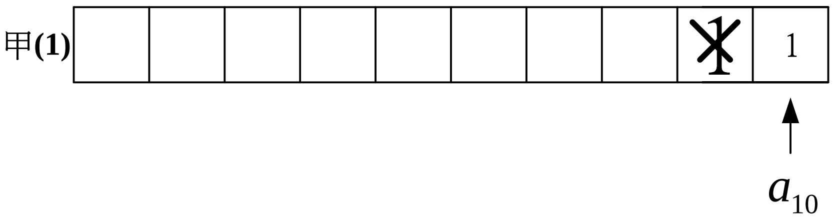
1. 單選
解：



$(p+q=1)$

⇨ $\dfrac{q\times 6\%}{p\times 90\%+q\times 6\%}=\dfrac{22}{67}$ ⇨ $\dfrac{6q}{90p+6q}=\dfrac{22}{67}$ ⇨ $p=12\%$ ###

2. 單選
解：



(*)1 號球=甲接球、2 號球=乙接球、3 號球=丙接球
(**) 設 a_i 為第 i 球是 1 號球、第 i-1 球不是 1 號球的個數
(例：a_{10} 為第 10 球是 1 號球、第 9 球不是 1 號球的個數)

(1) $a_{10}=2^9-a_9$ ⇨ $a_{10}+a_9=2^9$

(2) $a_9=2^8-a_8$ ⇨ $a_9+a_8=2^8$

(3) $a_8=2^7-a_7$ ⇨ $a_8+a_7=2^7$

(4) $a_7=2^6-a_6$ ⇨ $a_7+a_6=2^6$

(5) $a_6=2^5-a_5$ ⇨ $a_6+a_5=2^5$

(6) $a_5=2^4-a_4$ ⇨ $a_5+a_4=2^4$

(7) $a_4 = 2^3 - a_3$ ⇨ $a_4 + a_3 = 2^3$

(8) $a_3 = 2^2 - a_2$ ⇨ $a_3 + a_2 = 2^2$

(9) $a_2 = 2^1 - a_1$ ⇨ $a_2 + a_1 = 2^1$

(10) $a_1 = 0$

----

(1)-(2)+(3)-(4)+… ⇨ $a_{10} - a_1 = 2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + ... + 2^3 - 2^2 + 2^1$

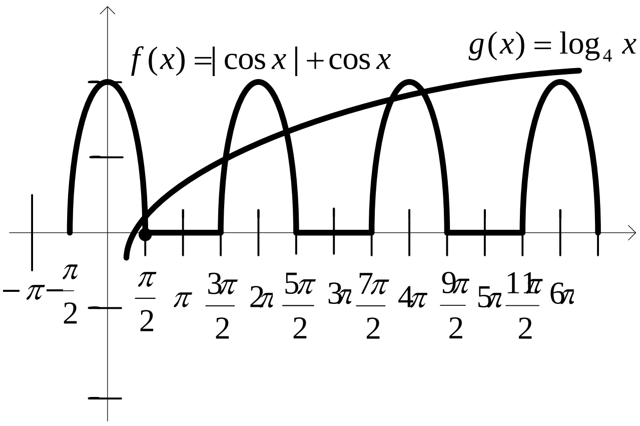
⇨ $a_{10} - a_1 = \dfrac{2^9[1-(-\frac{1}{2})^9]}{1-(-\frac{1}{2})} = 342$ ⇨ $a_{10} = 342$ ###

3. 單選

解：

(1) $|\cos x| + \cos x - \log_4 x = 0$ ⇨ $|\cos x| + \cos x = \log_4 x$ ⇨ 令 $\begin{cases} f(x) = |\cos x| + \cos x \\ g(x) = \log_4 x \end{cases}$

共有 5 個交點。 ###



4. 單選

解：

(1) $|A - \lambda I| = 0$ ⇨ $\left|\begin{bmatrix} -5-\lambda & -4 \\ 9 & 7-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0$ ⇨ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

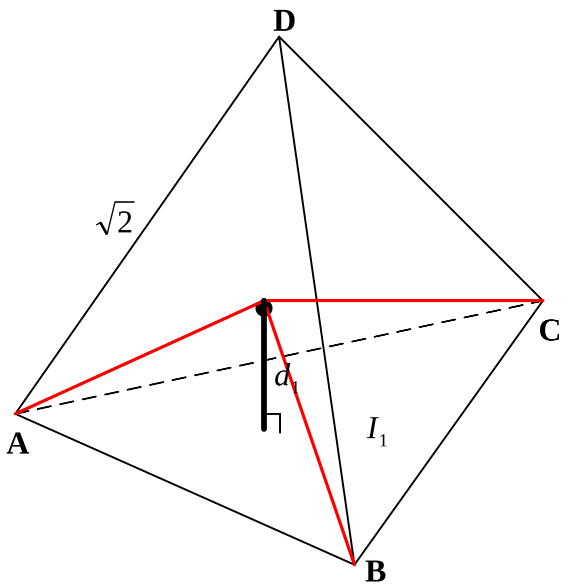
⇨ $A^2 - 2A + I_2 = 0$ ⇨ $A^2 - A = A - I_2$ ， $A^2 = 2A - I_2$

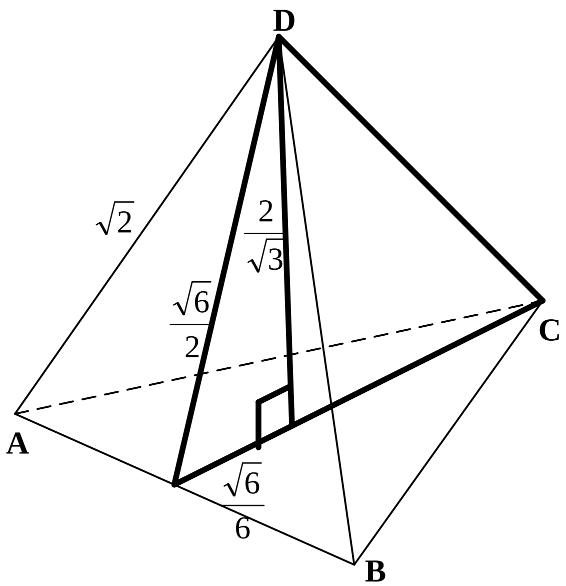
(2) $A^{51} - A^{50} = A^{49}(A^2 - A) = A^{49}(A - I) = A^{50} - A^{49} == A^{49} - A^{48} = ... = A - I_2$

(3) $A^{51}-A^{50}+A^3-3A^2-2A+4I_2=(A^{51}-A^{50})+(A-I_2)(A^2-2A+I_2)-5A+4I_2$

$$=(A-I_2)+0-5A+5I_2=-4A+4I_2=\begin{bmatrix}24 & 16\\ -36 & -24\end{bmatrix}$$ ###

5. 單選





解：

(1) $V_{ABCD}=V_{I_1}+V_{I_2}+V_{I_3}+V_{I_4}$

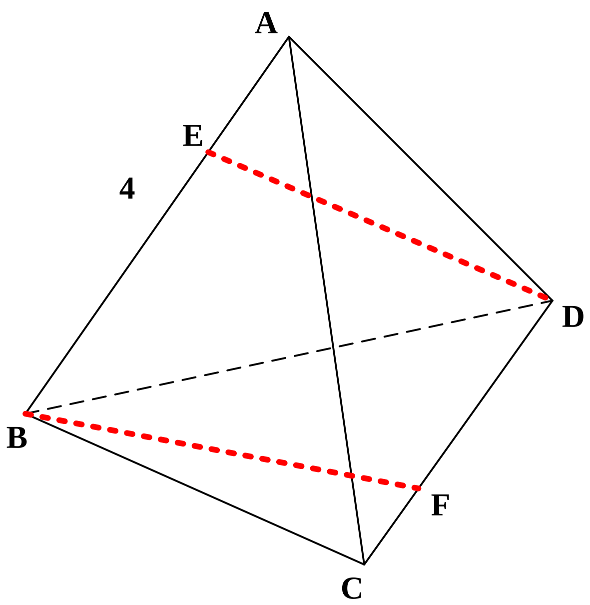
⇨ $\Delta ABC\text{面積}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}=\Delta\text{ABC面積}\times(d_1+d_2+d_3+d_4)\times\frac{1}{3}$

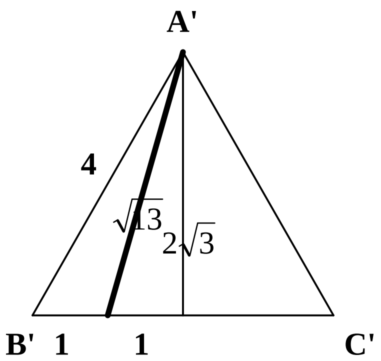
⇨ $d_1+d_2+d_3+d_4=\frac{2}{\sqrt{3}}$

(2) $(d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}+d_4^{\ 2})(1^2+1^2+1^2+1^2)\geq(d_1+d_2+d_3+d_4)^2$

⇨ $(d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}+d_4^{\ 2})\times(4)\geq(\frac{2}{\sqrt{3}})^2$ ⇨ $(d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}+d_4^{\ 2})\geq\frac{1}{3}$ ###

6. 單選





解：

(*) 令 $\overline{AB}=4$ ⇨ $\overline{DE}=\sqrt{13}$ 、 $\overline{BF}=\sqrt{13}$

(1) $\overline{DE}\bullet\overline{BF}=|\overline{DE}||\overline{BF}|\cos\theta=\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cos\theta=13\cos\theta$

⇨ $-4=13\cos\theta$ ⇨ $\cos\theta=-\dfrac{4}{13}$ ⇨ $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{153}}{13}$ **(詳解在下)** ###

(1*) $\overline{DE}\bullet\overline{BF}=(\overline{DA}+\overline{AE})\bullet(\overline{BC}+\overline{CF})=(\overline{DA}+\dfrac{1}{4}\overline{AB})\bullet(\overline{BC}+\dfrac{1}{4}\overline{CD})$

$=\overline{DA}\bullet\overline{BC}+\dfrac{1}{4}\overline{DA}\bullet\overline{CD}+\dfrac{1}{4}\overline{AB}\bullet\overline{BC}+\dfrac{1}{16}\overline{AB}\bullet\overline{CD}$

$=0+(-2)+(-2)+0=-4$

(1)** $\overline{DA}\bullet\overline{BC}=\overline{DA}\bullet(\overline{BD}+\overline{DC})=\overline{DA}\bullet\overline{BD}+\overline{DA}\bullet\overline{DC}$

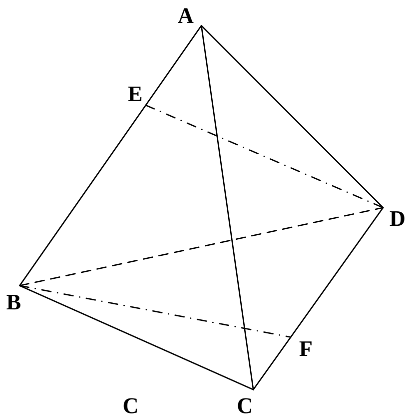
$=4\times4\cos120^0+4\times4\cos60^0=4\times4\times(-\dfrac{1}{2})+4\times4\times(\dfrac{1}{2})=0$

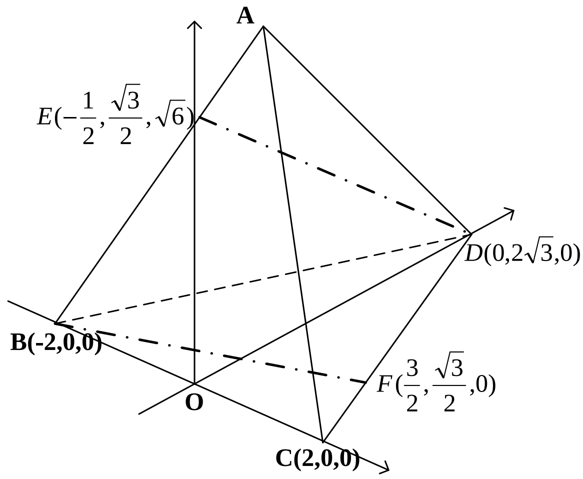
(1)** $\dfrac{1}{4}\overline{DA}\bullet\overline{CD}=\dfrac{1}{4}\times4\times4\cos120^0=-2$

(1)** $\dfrac{1}{4}\overline{AB}\bullet\overline{BC}=\dfrac{1}{4}\times4\times4\cos120^0=-2$

(1)** $\dfrac{1}{16}\overline{AB}\bullet\overline{CD}=\dfrac{1}{16}\overline{AB}\bullet(\overline{CA}+\overline{AD})=\dfrac{1}{16}(\overline{AB}\bullet\overline{CA}+\overline{AB}\bullet\overline{AD})=0$

另解：

(*) 

⇨ 

(1) $F=\dfrac{3C+D}{1+3}=(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$

(2) $E=\dfrac{B+3A}{1+3}=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{6})$

(3) $\vec{BF}=(\dfrac{7}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$

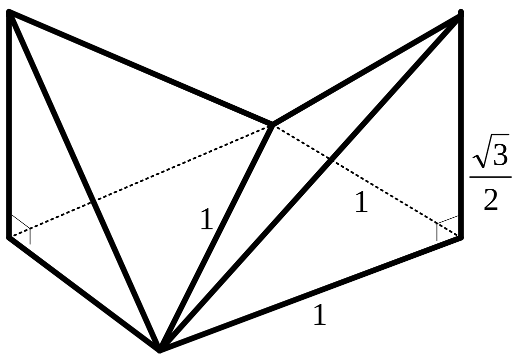
(4) $\vec{ED}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\sqrt{6})$

(5) $\vec{BF}\cdot\vec{ED}=|\vec{BF}||\vec{ED}|\cos\theta$ ⇨ $\dfrac{7}{4}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{\sqrt{52}}{2}\times\dfrac{\sqrt{52}}{2}\cos\theta$ ⇨ $\cos\theta=\dfrac{4}{13}$

⇨ $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{153}}{13}$ ###

7. 單選

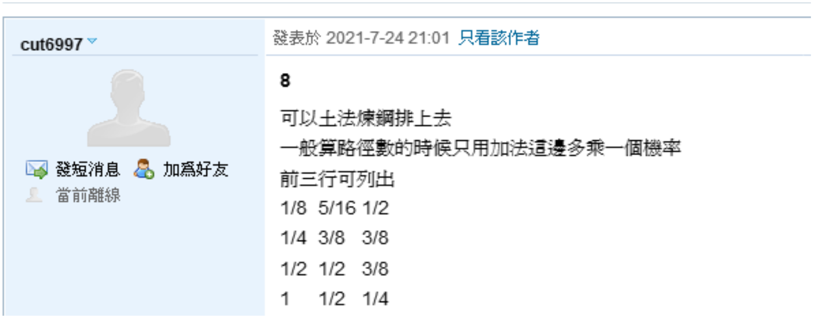
解：



(1) 體積=$(\dfrac{1}{3}\times$底面積$\times$高$)\times 2=(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2})\times 2=\dfrac{1}{4}$ ###

8. 單選

解：借以下解答



cut6997

發短消息 加爲好友
當前離線

發表於 2021-7-24 21:01 只看該作者

8

可以土法煉鋼排上去

一般算路徑數的時候只用加法這邊多乘一個機率

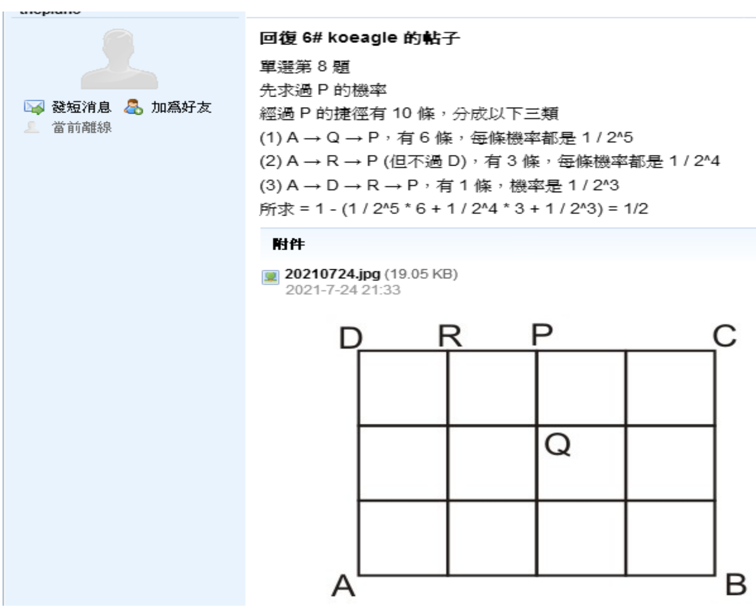
前三行可列出

1/8 5/16 1/2

1/4 3/8 3/8

1/2 1/2 3/8

1 1/2 1/4



發短消息 加爲好友
當前離線

回復 6# koeagle 的帖子

單選第 8 題

先求過 P 的機率

經過 P 的捷徑有 10 條，分成以下三類

(1) A → Q → P，有 6 條，每條機率都是 1 / 2^5

(2) A → R → P (但不過 D)，有 3 條，每條機率都是 1 / 2^4

(3) A → D → R → P，有 1 條，機率是 1 / 2^3

所求 = 1 - (1 / 2^5 * 6 + 1 / 2^4 * 3 + 1 / 2^3) = 1/2

附件

20210724.jpg (19.05 KB)
2021-7-24 21:33

9. 複選題

解：

(1) $A(1,2,3)$ ⇨ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} a_1+2b_1+3c_1=0 \\ a_2+2b_2+3c_2=0 \\ a_3+2b_3+3c_3=0 \end{cases}$

(2) $B(3,2,1)$ ⇨ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 3a_1+2b_1+c_1=d_1 \\ 3a_2+2b_2+c_2=d_2 \\ 3a_3+2b_3+c_3=d_3 \end{cases}$

(A) (0,0,0) ⇨ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 0=d_1 \\ 0=d_2 \\ 0=d_3 \end{cases}$ ⇨ 若 $d_i \neq 0$，則 (0,0,0) 非解 (x)

(B) (1)+(2) ⇨ $\begin{cases} 4a_1+4b_1+4c_1=d_1 \\ 4a_2+4b_2+4c_2=d_2 \\ 4a_3+4b_3+4c_3=d_3 \end{cases}$ ⇨ (4,4,4)是 Γ' 的解 (√)

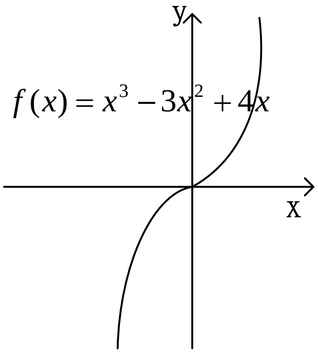
(C) (2)-(1) ⇨ $\begin{cases} 2a_1-2c_1=d_1 \\ 2a_2-2c_2=d_2 \\ 2a_3-2c_3=d_3 \end{cases}$ ⇨ (2,0,–2)是 Γ' 的解 (√)

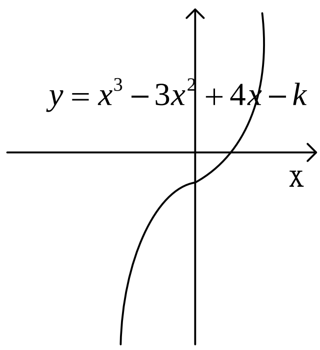
(D) 7×**(1)+(2)** ⇨ $\begin{cases} 10a_1+16b_1+22c_1=d_1 \\ 10a_2+16b_2+22c_2=d_2 \\ 10a_3+16b_3+22c_3=d_3 \end{cases}$ ⇨ (10,16,22)是 Γ' 的解 (√)

10. 複選題

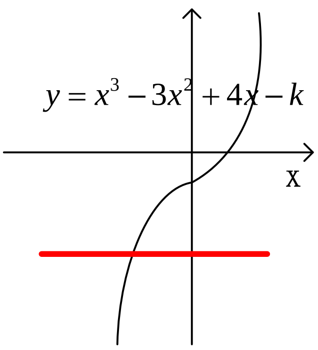
解：

(*) $y=x^3-3x^2+4x-k$





⇨



(A) (√)

(B) 恒 $y'=3x^2-6x+4>0$ 無水平切線 (x)

(C) 如圖：無最高點 (×)

(D) $y=x^3-3x^2+4x-k=(x-1)^3+x+1-k$

(i) $X(m,n)$ ⇨ $(m-1)^3+m+1-k=n$ ⇨ $(m-1)^3=n-m-1+k$ (***)

(ii) $x=2-m$ ⇨ $(2-m-1)^3+(2-m)+1-k$

$=(1-m)^3+(3-m-k)$

$=-(n-m-1+k)+(3-m-k)=4-n-2k$ (√) ###

11. 複選題

解：

(*) $y_i=ax_i+b$ **(**)** $z_i=\frac{1}{a}y_i+b$

(1) 小華：$y_i=12a+b$，$48=\frac{1}{a}y_i+b$ ⇨ $48=\frac{1}{a}(12a+b)+b$

(2) 小明：$55=28a+b$

⇨ $a=\frac{5}{4}$、$b=20$

(3) (*) $y_i=\frac{5}{4}x_i+20$ **(**)** $z_i=\frac{4}{5}y_i+20$

(A) $\sigma_{zi}=\frac{4}{5}\sigma_{yi}$ 、$\sigma_{yi}=\frac{5}{4}\sigma_{xi}$ ⇨ $\sigma_{zi}=\sigma_{xi}$ (√)

(B) (*) $y_i=\frac{5}{4}x_i+20$ ⇨ $y_i=\frac{5}{4}\times12+20=35$ (×)

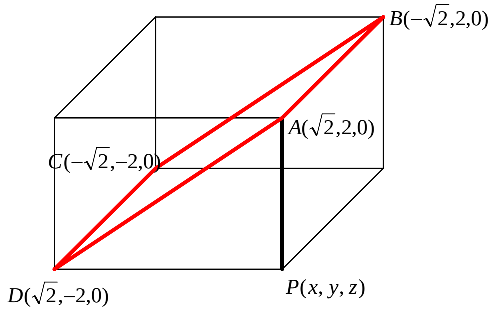
(C) $ab=\frac{5}{4}\times20=25$ (√)

(D) $z_i=100$ ⇨ $100=\frac{4}{5}y_i+20$ ⇨ $y_i=100$ (√)

12. 複選題

解：

(*)

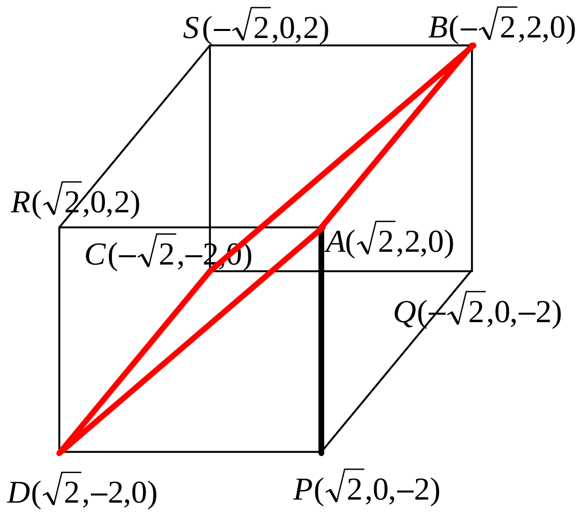


(**) 設 $P(x,y,z)$ 為一頂角

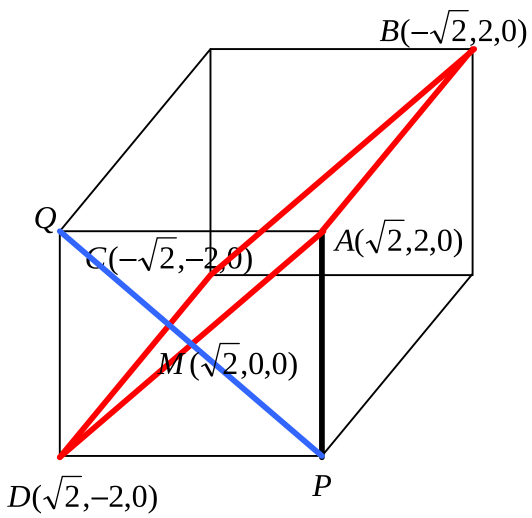
(1) $\vec{AB}=(-2\sqrt{2},0,0)$、$\vec{AP}=(x-\sqrt{2},y-2,z)$、$\vec{DP}=(x-\sqrt{2},y+2,z)$

(2) $\begin{cases}\vec{AB}\bullet\vec{AP}=0\\ \vec{AP}\bullet\vec{DP}=0\\ \overline{AP}=2\sqrt{2}\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}-2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})=0\\ (x-\sqrt{2})^2+(y+2)(y-2)+z^2=0\\ \sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2+z^2}=2\sqrt{2}\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y^2-4+z^2=0\\ (y-2)^2+z^2=8\end{cases}$

⇨ $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=0\\ z=\pm2\end{cases}$ ⇨ $P(\sqrt{2},0,-2)$、$Q(-\sqrt{2},0,-2)$、$R(\sqrt{2},0,2)$、$S(-\sqrt{2},0,2)$ ###



另解：



(1) $M(\sqrt{2},0,0)$ 且設 $P(\sqrt{2},y,z)$

(2) $\overline{PM}=2$、$\overline{PM}\perp\overline{AD}$ ⇨ $\vec{PM}\cdot\vec{AD}=0$ ⇨ $y=0$ ⇨ $z=\pm2$

(3) $P=(\sqrt{2},0,2)$、$Q=(\sqrt{2},0,-2)$、$R=(-\sqrt{2},0,2)$、$S=(-\sqrt{2},0,-2)$ ###

1. 填充

解：

(*) 令 $A=3^x$，$2\times9^x-(m+1)\times3^x+(m+1)=0$ ⇨ $2A^2-(m+1)A+(m+1)=0$

(1) 原式有兩相異根 ⇨ 則 $2A^2-(m+1)A+(m+1)=0$有兩根α、β 且

(i) $\alpha\neq\beta$ (ii) α、β皆是正根 ⇨ $\begin{cases} b^2-4ac>0\Rightarrow(m+1)^2-4\times2(m+1)>0 \\ \alpha+\beta=\dfrac{(m+1)}{2}>0 \\ \alpha\beta=\dfrac{(m+1)}{2}>0 \end{cases}$

⇨ $m>7$ ###

2. 填充

解：

(1) $(n^2-2n-2)^{n^2+47}=(n^2-2n-2)^{16n-16}$ ⇨ $\dfrac{(n-2n-2)^{n^2+47}}{(n-2n-2)^{16n-16}}=1$

⇨ $(n^2-2n-2)^{n^2-16n+63}=1$

(i) $n^2-2n-2=1$ ⇨ $n^2-2n-3=0$ ⇨ $n=3$

(ii) $n^2-16n+63=0$ ⇨ $n=7$，$n=9$

⇨ 總和=3+7+9=19 ###

3. 填充

解：

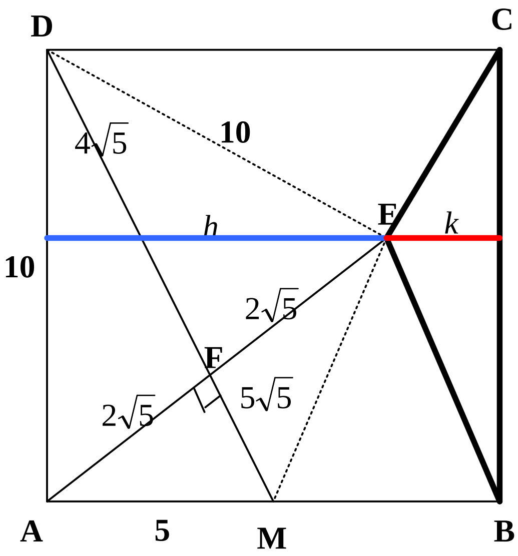
(1) $\int_0^3 x^2[x]dx=\int_0^1 x^2[x]dx+\int_1^2 x^2[x]dx+\int_2^3 x^2[x]dx+\int_3^3 x^2[x]dx$

$=\int_0^1 x^2\times0dx+\int_1^2 x^2\times1dx+\int_2^3 x^2\times2dx+\int_3^3 x^2\times3dx$

$=0+\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2+\frac{2}{3}x^3\Big|_2^3+0=15$ ###

4. 填充

解：



(*) 如圖說明：

(1) $\overline{AM}=5$ ⇨ $\overline{DM}=5\sqrt{5}$

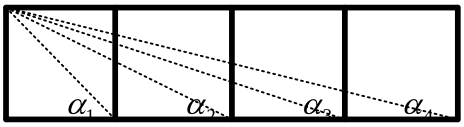
(2) 利用 ΔDAM 面積 ⇨ $\overline{AF}=2\sqrt{5}$ ⇨ $\overline{DF}=4\sqrt{5}$

(3) 利用 ΔADE 面積：$(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4\sqrt{5})\times 2=\frac{1}{2}\times 10h$ ⇨ $h=8$ ⇨ $k=2$

(4) ΔBCE 面積：$\frac{1}{2}\times 10\times 2=10$ ###

5. 填充

解：



(*) $\tan\alpha_1=1$ 、 $\tan\alpha_2=\frac{1}{2}$ 、 $\tan\alpha_3=\frac{1}{3}$ 、 $\tan\alpha_4=\frac{1}{4}$

(1) $\begin{cases} \tan(\alpha_1+\alpha_2)=\dfrac{\tan\alpha_1+\tan\alpha_2}{1-\tan\alpha_1\tan\alpha_2}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-1\times\frac{1}{2}}=3=A \\ \tan(\alpha_3+\alpha_4)=\dfrac{\tan\alpha_3+\tan\alpha_4}{1-\tan\alpha_3\tan\alpha_4}=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}=\dfrac{7}{11}=B \end{cases}$

⇨ $\tan[(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)]=\dfrac{A+B}{1-AB}=\dfrac{3+\frac{7}{11}}{1-3\times\frac{7}{11}}=-4$ ###

6. 填充

解：

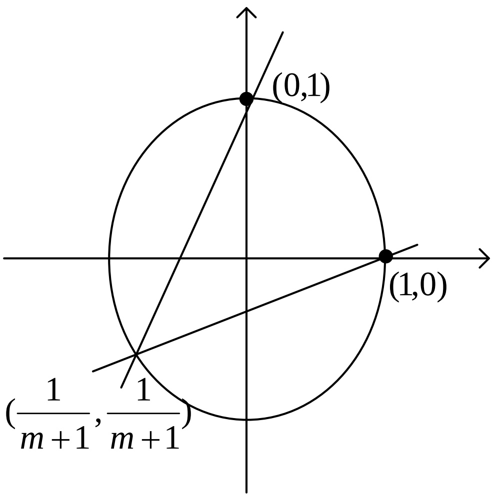
(*) $2z+2|z|=3+2i$

(1) 令 $z=a+bi$

$2z+2|z|=3+2i$ ⇨ $2(a+bi)+2\sqrt{a^2+b^2}=3+2i$ ⇨ $(2a+2\sqrt{a^2+b^2})+2bi=3+2i$

⇨ $\begin{cases} 2a+2\sqrt{a^2+b^2}=3 \\ 2b=2 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} a=\dfrac{5}{12} \\ b=1 \end{cases}$ ⇨ $z=\dfrac{5}{12}+i$ ###

7. 填充



解：

(*) $A=\{(x,y)\,|\,mx+y=1\}$ 通過點 $(0,1)$ 、 $B=\{(x,y)\,|\,x+my=1\}$ 通過點 $(1,0)$ 、 $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 為單位圓。

(1) A、**B** 的交點$\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=1 \end{cases}$ ⇨ $(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m+1})$

(2) $(A\cup B)\cap C$ 有三交點，如圖所示 ⇨ $(\frac{1}{m+1})^2+(\frac{1}{m+1})^2=1$ ⇨ $m=-1\pm\sqrt{2}$ ###

8. 填充

解：

thepiano

發短消息 加爲好友

當前離線

發表於 2021-7-25 00:12 只看該作者

回復 12# koeagle 的帖子

填充第 8 題

題意是數字由左而右要愈取愈小

數字 1：不管怎麼排列，數字 1 一定會被取到，共有 9! 個 1，總和爲 9!

數字 2：2 一定要排在 1 的左邊，才會被取到，共有 9! / 2 個 2，總和亦爲 9!

數字 3：3 一定要排在 2 和 1 的左邊，才會被取到，共有 9! / 3 個 3，總和亦爲 9!

:

:

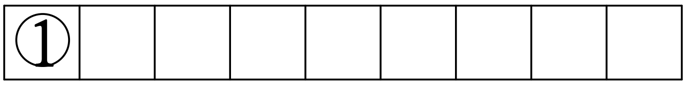
數字 9：9 一定要排在最前面，才會被取到，共有 9! / 9 個 9，總和亦爲 9!

所求 = 9! * 9 / 9! = 9

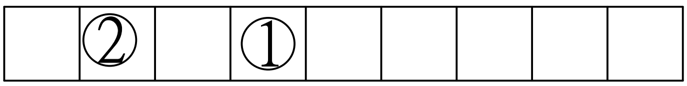
(*) 借上解答

(**) 9 位數全部共有 $9!$ 個

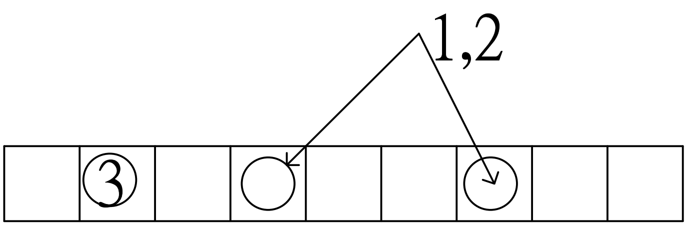
(1) 選到數字 1 的 9 位數共有：$8!\times 9$ 個 ⇨ 期望值=$\frac{8!\times 9}{9!}\times 1=1$



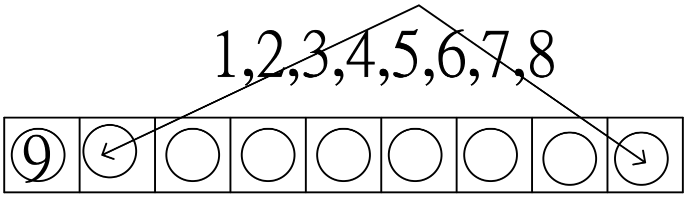
(2) 選到數字 2 的 9 位數共有：$\frac{9!}{2!}\times 1\times 1$ 個 ⇨ 期望值=$\frac{\frac{9!}{2!}\times 1\times 1}{9!}\times 2=1$



(3) 選到數字 3 的 9 位數共有：$\frac{9!}{3!}\times 1\times 2!$ 個 ⇨ 期望值=$\frac{\frac{9!}{3!}\times 1\times 2!}{9!}\times 3=1$



(4) 選到數字 9 的 9 位數共有：8! 個 ⇨ 期望值$=\frac{8!}{9!}\times 9=1$



(5) 期望值=9 ###

9. 填充

thepiano

發短消息 加為好友

當前離線

發表於 2021-7-25 17:06 只看該作者

回復 15# s7908155 的帖子

填充第 9 題

先估一下

若 x > 700

[x] + [x/2] > 1050，不合

原方程精簡成 [x] + [x/2] + [x/6] + [x/24] + [x/120] = 1001

利用 x ≧ [x]

x + x/2 + x/6 + x/24 + x/120 ≧ 1001

206x ≧ 1001 * 120

x ≧ 583.1...

當 x = 584

[x] + [x/2] + [x/6] + [x/24] + [x/120]

= 584 + 292 + 97 + 24 + 4

= 1001

解：

(*) 借上解答

(*) $[\frac{x}{1!}]+[\frac{x}{2!}]+\ldots+[\frac{x}{10!}]=1001$

(1) 先估 $x=6!$ ⇨ $[\frac{x}{1!}]+[\frac{x}{2!}]+\ldots+[\frac{x}{10!}]=720+360+\ldots>1001$

(2) 再估 $x=5!$ ⇨ $[\frac{x}{1!}]+[\frac{x}{2!}]+\ldots+[\frac{x}{10!}]=120+60+20+5+1+0+\ldots=206<1001$

⇨ $5!<x<6!$ ⇨ $[\frac{x}{1!}]+[\frac{x}{2!}]+\ldots+[\frac{x}{10!}]=1001$ ⇨ $[x]+[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{6}]+[\frac{x}{24}]+[\frac{x}{120}]=1001$

(3) ∵ $x-1<[x]\le x$ ⇨

$$(x-1)+(\frac{x-1}{2})+(\frac{x-1}{6})+(\frac{x-1}{24})+(\frac{x-1}{120})<[x]+[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{6}]+[\frac{x}{24}]+[\frac{x}{120}]$$

$$\le x+\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{24}+\frac{x}{120}$$

⇨ $206(x-1)<1001\times 120\le 206x$ ⇨ $(x-1)<\frac{1001\times 120}{206}\le x$

⇨ $(x-1)<583.1\le x$ ⇨ $583.1\le x<584.1$ ⇨ $x=584$ ###

1. 計算

解：

(*) $(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c})=3$

(1) $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ⇨ $\cos 60^0=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ⇨ $\frac{1}{2}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

⇨ $ac=a^2+c^2-b^2$ ⇨ $a^2+c^2=b^2+ac$

(2) $(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c})=\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=2+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}$

$$=2+\frac{c(b+c)+a(a+b)}{(a+b)(b+c)}=2+\frac{bc+c^2+a^2+ab}{(a+b)(b+c)}$$

$$=2+\frac{bc+b^2+ac+ab}{(a+b)(b+c)}=2+\frac{b(c+b)+a(c+b)}{(a+b)(b+c)}$$

$$=2+\frac{(c+b)(a+b)}{(a+b)(b+c)}=3$$ ###

2. 計算

解：

(*) $zw-2iz-iw-5=0$，令 $w=a+bi$

(1) $zw-2iz-iw-5=0$ ⇨ $z(w-2i)=5+iw$ ⇨ $|z(w-2i)|=|5+iw|$

⇨ $|z||(w-2i)|=|5+iw|$ ⇨ $2|(a+(b-2)i|=|(5-b)+ai|$

⇨ $2\sqrt{a^2+(b-2)^2}=\sqrt{(5-b)^2+a^2}$

⇨ $4[a^2+(b-2)^2]=(b-5)^2+a^2$

⇨ $4a^2+4b^2-16b+16=b^2-10b+25+a^2$

⇨ $3a^2+3b^2-6b=9$ ⇨ $a^2+b^2-2b=3$

⇨ $a^2+(b-1)^2=4$ ⇨ $\sqrt{a^2+(b-1)^2}=2$ ⇨ $|w-i|=2$ ###

3. 計算

解：

(*) $(1+x)^n=C_0^n+C_1^n x+C_2^n x^2+C_3^n x^3+\ldots$

(1) $(1+i)^n=C_0^n+C_1^n i+C_2^n i^2+C_3^n i^3+C_4^n i^4+C_5^n i^5+\ldots$

⇨ $(\sqrt{2})^n(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^n=C_0^n+iC_1^n-C_2^n-iC_3^n+C_4^n+iC_5^n+\ldots$

⇨ $(\sqrt{2})^n(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^n=(C_0^n-C_2^n+C_4^n-\ldots)+i(C_1^n-C_3^n+C_5^n-\ldots)$

⇨ $(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})=(C_0^n-C_2^n+C_4^n-\ldots)+i(C_1^n-C_3^n+C_5^n-\ldots)$

⇨ $\begin{cases}(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}=C_0^n-C_2^n+C_4^n-C_6^n+\ldots\\(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=C_1^n-C_3^n+C_5^n-C_7^n+\ldots\end{cases}$

(2) $(C_0^n-C_2^n+C_4^n-\ldots)^2+(C_1^n-C_3^n+C_5^n-\ldots)^2=[(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4})]^2+[(\sqrt{2})^n(\sin\frac{n\pi}{4})]^2=2^n$