

大學入學考試中心

110 學年度指定科目考試數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 設 x_0, y_0 為正實數。若坐標平面上的點 $(10x_0, 100y_0)$ 在函數 $y=10^x$ 的圖形上，則點 $(x_0, \log y_0)$ 會在直線 $y=ax+b$ 的圖形上，其中 a, b 為實數。試問 $2a-b$ 的值為何？
(1) 4 (2) 9 (3) 15 (4) 18 (5) 22。 【110 數甲】

答：(5)

解： $100y_0 = 10^{10x_0} \Rightarrow \log 100y_0 = 10x_0 \log 10 \Rightarrow 2 + \log y_0 = 10x_0$
 $\Rightarrow \log y_0 = 10x_0 - 2 \therefore a=10, b=-2$ ，則 $2a-b=22$

2. 研究團隊採用某快篩試劑的檢驗，以了解保護區內生物因環境汙染而導致體內毒素累積超過標準的比率。此試劑檢驗結果只有紅色、黃色兩種。
依據過去的經驗得知：若體內毒素累積超過標準，經此試劑檢驗後，有 75% 顯示為紅色；若體內毒素累積未超過標準，經此試劑檢驗後，有 95% 顯示為黃色。已知此保護區的某類生物經試劑檢驗後，有 7.8% 的結果顯示為紅色。假設此類生物實際體內毒素累積超過標準的比率為 $p\%$ ，試選出正確的選項。
(1) $1 \leq p < 3$ (2) $3 \leq p < 5$ (3) $5 \leq p < 7$ (4) $7 \leq p < 9$ (5) $9 \leq p < 11$ 。 【110 數甲】

答：(2)

解：
$$\begin{cases} \text{超標 } p\% \begin{cases} 75\% \text{ 紅} \\ 25\% \text{ 黃} \end{cases} \\ \text{未超標 } 1-p\% \begin{cases} 5\% \text{ 紅} \\ 95\% \text{ 黃} \end{cases} \end{cases} \quad p\% \times 75\% + [1-p\%] \times 5\% = 7.8\% \Rightarrow p=4$$

3. 試求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{10}}{n^{10}} [1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + (2n)^9]$ 的值。
(1) 10^9 (2) $10^9 \times (2^{10} - 1)$ (3) $2^9 \times (10^{10} - 1)$ (4) $10^9 \times 2^{10}$ (5) $2^9 \times 10^{10}$ 。 【110 數甲】

答：(4)

解：
$$\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{10} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^9 + \left(\frac{2}{n} \right)^9 + \left(\frac{3}{n} \right)^9 + \cdots + \left(\frac{2n}{n} \right)^9 \right] \times \frac{1}{n}$$
$$= 10^{10} \int_0^2 x^9 dx = 10^{10} \times \frac{x^{10}}{10} \Big|_0^2 = 10^9 \times 2^{10}$$

二、多選題 (佔 40 分)

4. 某電子公司有數百名員工，其用餐方式分為自備、外食兩種。經長期調查發現：若當日用餐為自備的員工，則隔天會有10%轉為外食；若當日用餐為外食的員工，則隔天會有20%轉為自備。

假設 x_0 、 y_0 分別代表該公司今日用餐自備人數與外食人數占員工總人數的比例，其中 x_0 、 y_0 皆為正數，且 x_n 、 y_n 分別代表經過 n 日後用餐自備人數與外食人數占員工總人數的比例。在該公司員工不變動的情形下，試選出正確的選項。

(1) $y_1 = 0.9y_0 + 0.2x_0$

(2) $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$

(3) 若 $\frac{x_0}{y_0} = \frac{2}{1}$ ，則 $\frac{x_n}{y_n} = \frac{2}{1}$ 對任意正整數 n 均成立

(4) 若 $y_0 > x_0$ ，則 $y_1 > x_1$

(5) 若 $x_0 > y_0$ ，則 $x_0 > x_1$ 。

【110 數甲】

答：(2)(3)

解：(1)(2) $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = 0.1x_0 + 0.8y_0$

(3) $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9-0.7p \\ 0.1+0.7p \end{bmatrix}$ ， $p > 1-p$ ，即 $p > \frac{1}{2}$ 時
 $(0.1+0.7p) - (0.9-0.7p) = 1.4p - 0.8$ 不必然為正

(5) 承(4)，當 $p < 1-p$ ，即 $p < \frac{1}{2}$ 時，

$(1-p) - (0.9-0.7p) = 0.1-0.3p$ 不必然為正

5. 假設 $f(x)$ 為五次實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $x^n - 1$ 的餘式為 $r_n(x)$ ， n 是正整數。試選出正確的選項。

(1) $r_1(x) = f(1)$

(2) $r_2(x)$ 是一次實係數多項式

(3) $r_4(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 所得的餘式等於 $r_2(x)$

(4) $r_5(x) = r_6(x)$

(5) 若 $f(-x) = -f(x)$ ，則 $r_3(-x) = -r_3(x)$ 。

【110 數甲】

答：(1)(3)

解： $f(x) = (x^n - 1)Q_n(x) + r_n(x)$ ， $\deg f(x) = 5$ ， $n \in \mathbb{N}$

(1) $f(x) = (x-1)Q_1(x) + r_1(x) \Rightarrow f(1) = r_1(1)$

(2) $f(x) = (x^2 - 1)Q_2(x) + r_2(x) \Rightarrow \deg r_2(x) \leq 1$ 或 $r_2(x) = 0$

$$(2) \text{反例: } f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 1), r_2(x) = 0$$

$$(3) f(x) = (x^4 - 1)Q_4(x) + r_4(x) = (x^2 - 1)Q_2(x) + r_2(x) \\ \Rightarrow R_{(x^2-1)}[(x^4 - 1)Q_4(x) + r_4(x)] = R_{(x^2-1)}[(x^2 - 1)Q_2(x) + r_2(x)] \\ \Rightarrow R_{(x^2-1)}[r_4(x)] = R_{(x^2-1)}[r_2(x)] = r_2(x)$$

$$(4) \text{反例: } f(x) = x^5 - 1, r_5(x) = 0, r_6(x) = x^5 - 1$$

$$(5) f(x) \text{ 為奇函數} \Rightarrow f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f(x) = (x^3 - 1)Q_3(x) + r_3(x) \Rightarrow r_3(x) = ax^2 + cx + b$$

$$\text{則 } r_3(-x) \neq -r_3(x)$$

6. 一個標有1至12號格子的12格骰骰樂遊戲，每回遊戲以投擲一枚均勻銅板四次來決定要骰哪些格子。規則如下：

(一)第一次投擲銅板，若是正面，則骰1號格子；若是反面，則骰3號格子。

(二)第二、三、四次投擲銅板，若是正面，則所骰格子的號碼為前一次所骰格子的號碼加1；若是反面，則所骰格子的號碼為前一次所骰格子的號碼加3，依此類推。

例如：投擲銅板四次的結果依序為「正、反、反、正」，則會骰編號分別為1、4、7、8號的四個格子。

假設 p_m 代表在每回遊戲中 m 號格子被骰到的機率，試選出正確的選項。

$$(1) p_2 = \frac{1}{4} \quad (2) p_3 = \frac{1}{2} \quad (3) p_4 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3 \quad (4) p_8 > p_{10}$$

$$(5) \text{在4號格子被骰到的條件下，3號格子被骰到的機率為 } \frac{1}{2}。$$

【110 數甲】

答：(1)(3)(4)

$$\text{解：}(1) p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(2) p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

$$(3) p_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2! = \frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{9}{16}$$

$$(4) p_8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{5!}{4!} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{137}{256}$$

$$p_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \frac{8!}{7!} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{6!}{2!4!} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{4!}{3!} = \frac{529}{1024}$$

$$(5) \text{條件機率} = \frac{p_3 \times \frac{1}{2}}{p_4} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{9}{16}} = \frac{5}{9}$$

7. 設 $F(x)$ 為一實係數多項式且 $F'(x) = f(x)$ 。已知 $f'(x) > x^2 + 1.1$ 對所有的實數 x 均成立，試選出正確的選項。

- (1) $f'(x)$ 為遞增函數 (2) $f(x)$ 為遞增函數 (3) $F(x)$ 為遞增函數
(4) $[f(x)]^2$ 為遞增函數 (5) $f(f(x))$ 為遞增函數。

【110 數甲】

答：(2)(5)

解：(1) 反例： $f'(x) = x^2 + 5 > x^2 + 1.1$ ，但 $f'(x)$ 不為遞增

(2) $f'(x) > x^2 + 1.1 > 0$ ，故 $f(x)$ 必為遞增

(3) 反例： $F(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{2}x^2$ ， $F'(x) = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x$

$F''(x) = f'(x) = x^2 + 5 > x^2 + 1.1$ ，但 $F(x)$ 不為遞增

(4) $\left([f(x)]^2\right)' = 2f(x) \cdot f'(x)$ 不恆正， $[f(x)]^2$ 不為遞增

(5) $(f(f(x)))' = f'(f(x))f'(x)$ 恆正， $f(f(x))$ 為遞增

8. 已知 z_1, z_2, z_3, z_4 為四個相異複數，且其在複數平面上所對應的點，依序可連成一個平行四邊形，試問下列哪些選項必為實數？

- (1) $(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$ (2) $z_1 - z_2 + z_3 - z_4$ (3) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

(4) $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ (5) $\left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_3}\right)^2$ 。

【110 數甲】

答：(2)(4)

解：不失其一般性，令 $z_1 = 0$ ， $z_2 = a$ ， $z_4 = b + ci$

則 $z_3 = (a+b) + ci$ ， $a, b, c \in \mathbb{R}$ ， $abc \neq 0$

(1) $(z_1 - z_3)(z_2 - z_4) = [(-a-b) - ci][(a-b) - ci] \notin \mathbb{R}$

(2) $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = [(a+b) + ci] - [(a+b) + ci] = 0 \in \mathbb{R}$

(2) $z_1 - z_2$ 與 $z_3 - z_4$ 幾何意義等價「逆向量」，故 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ 等價「零向量」

(3) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = [2(a+b) + 2ci] \notin \mathbb{R}$

(3) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ 幾何意義為「重心」之四倍，不必然為實數

(4) $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{-a}{a} = -1 \in \mathbb{R}$

(4) $z_1 - z_2$ 與 $z_3 - z_4$ 幾何意義「互為逆向量」，故 $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ 必為「-1」

$$(5) \left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_3} \right)^2 = \left[\frac{(a-b) - ci}{(-a-b) - ci} \right]^2 \notin R$$

三、選填題 (佔 18 分)

- A. 從 6、8、10、12 中任取三個相異數字，作為三角形的三邊長，且設此三角形的最大內角為 θ 。在所有可能構成的三角形中， $\cos \theta$ 的最小值為_____。(化成最簡分數)

【110 數甲】

答： $\frac{-11}{24}$

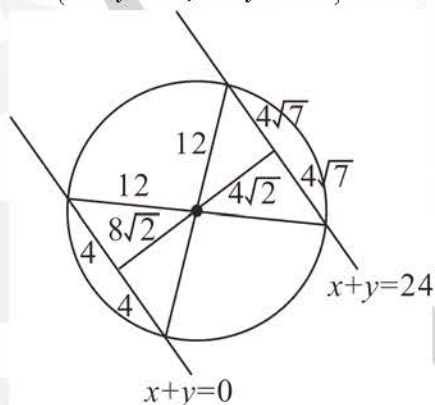
解： $\cos \theta$ 的最小值為 $\frac{6^2 + 8^2 - 12^2}{2 \times 6 \times 8} = \frac{-11}{24}$

- B. 坐標平面上，一個半徑為 12 的圓與直線 $x+y=0$ 相交於兩點，且這兩點的距離為 8。若此圓與直線 $x+y=24$ 交於 P 、 Q 兩點，則線段 \overline{PQ} 的長度為_____。

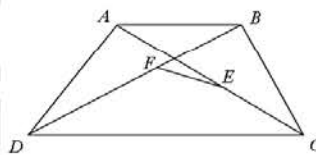
(化成最簡根式)【110 數甲】

答： $8\sqrt{7}$

解： $d(x+y=0, x+y=24) = 12\sqrt{2}$



- C. 考慮一梯形 $ABCD$ ，其中 \overline{AB} 與 \overline{DC} 平行。已知點 E 、 F 分別在對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 上，且 $\overline{AB} = \frac{2}{5}\overline{DC}$ 、 $\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{EC}$ 、 $\overline{BF} = \frac{2}{3}\overline{FD}$ ，如圖所示。



若將向量 \overrightarrow{FE} 表示成 $\alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{AD}$ ，則實數 $\alpha =$ _____、 $\beta =$ _____。(化成最簡分數)

【110 數甲】

答： $\alpha = \frac{9}{25}$ ， $\beta = \frac{-4}{25}$

解： $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \left[\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} \right] = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\left[\frac{2}{5}\overrightarrow{DC} \right] - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

$$= \frac{3}{5} \overrightarrow{AC} - \frac{6}{25} [\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}] - \frac{2}{5} \overrightarrow{AD} = \frac{9}{25} \overrightarrow{AC} - \frac{4}{25} \overrightarrow{AD}$$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

一. 坐標空間中，令 E 為通過三點 $A(0, -1, -1)$ 、 $B(1, -1, -2)$ 、 $C(0, 1, 0)$ 的平面。

假設 H 為空間中一點，且滿足 $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + 3(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$ 。

根據上述，試回答下列問題。

(1) 試求四面體 $ABCH$ 的體積。（註：四面體體積為三分之一的底面積乘以高）

(2) 令點 H' 為點 H 相對於平面 E 的對稱點，試求 H' 的坐標。

(3) 試判斷點 H' 在平面 E 的投影點是否位在 $\triangle ABC$ 的內部？並說明理由。

（註：三角形的內部不含三角形的三邊）

【110 數甲】

答：(1) $\frac{9}{2}$ (2) $H' \left(-\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -8 \right)$ (3) 投影點不在 $\triangle ABC$ 內部

解： $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1) \times (0, 2, 1) = (2, -1, 2)$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}(1, 0, -1) - \frac{1}{3}(0, 2, 1) + 3(2, -1, 2) = \left(\frac{20}{3}, -\frac{11}{3}, 5 \right)$$

$$\text{則 } H = \left(\frac{20}{3}, -\frac{11}{3}, 5 \right) + (0, -1, -1) = \left(\frac{20}{3}, -\frac{14}{3}, 4 \right)$$

$$(1) H-ABC \text{ 體積} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 20 & -11 & 15 \end{vmatrix} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{2}$$

$$(2) E: 2x - y + 2z + 1 = 0, \text{ 令 } t = -\frac{\frac{40}{3} + \frac{14}{3} + 8 + 1}{4 + 1 + 4} = -3$$

$$H' \left(\frac{20}{3} + 2(-3), -\frac{14}{3} + 2(-1)(-3), 4 + 2(2)(-3) \right) = \left(-\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -8 \right)$$

$$(3) \text{ 令投影點 } H'' = \frac{1}{2}(H + H') = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -2 \right)$$

$$\overrightarrow{AH''} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1 \right) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 2, 1) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{1}{3},$$

故 $H'' \notin \triangle ABC$ 內部

$$(2)(3) E: 2x - y + 2z + 1 = 0, \overrightarrow{HH'}: \begin{cases} x = \frac{20}{3} + 2s \\ y = -\frac{14}{3} - s \\ z = 4 + 2s \end{cases}$$

$$\overrightarrow{HH'} \text{ 與 } E \text{ 相交} \Rightarrow s = -3, \text{ 交點即投影點 } H'' \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -2 \right)$$

則對稱點 $H' \left(\frac{-16}{3}, \frac{4}{3}, -8 \right)$

而 $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1 \right) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 2, 1) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{1}{3}$,

故 $H' \notin \triangle ABC$ 內部

二. 坐標平面上，以 Γ 表示多項式函數 $y = x^3 - 4x^2 + 5x$ 的圖形，且以 L 表示直線 $y = mx$ ，其中 m 為實數。根據上述，試回答下列問題。

(1) 當 $m = 2$ 時，試求出在 $x \geq 0$ 的範圍內， Γ 與 L 的三個相異交點的 x 坐標。

(2) 承(1)，試求 Γ 與 L 所圍有界區域面積的值。

(3) 在 $x \geq 0$ 的範圍內，若 Γ 與 L 有三個相異交點，則滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a < m < b$ ，試求 a 、 b 之值。

【110 數甲】

答：(1) $0, 1, 3$ (2) $\frac{37}{12}$ (3) $a = 1, b = 5$

解：(1) $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^3 - 4x^2 + 5x \end{cases} \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 1, 3$

$$\begin{aligned} (2) & \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx + \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_1^3 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

$$(3) \begin{cases} y = mx \\ y = x^3 - 4x^2 + 5x \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + (5-m)x = 0$$

$$\text{則 } 5-m > 0 \text{ 且 } (-4)^2 - 4(5-m) > 0 \Rightarrow 1 < m < 5$$