國立竹東高中 110 學年度第一次教師甄選筆試試題及解答

科目：高中數學

一、 簡答題：共四大題，每題 5 分，計 20 分

1. 在數列 $<a_n>$ 中，當 $1 \le n \le 5$ 時，$a_n = n^2$，且對所有正整數 n，$a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$ 均成立，則 $a_{110} =$？

Ans：22。

2. ΔABC 中，M 為 $\overline{BC}$ 的中點，N 為 $\overline{BM}$ 的中點，若 $\angle A = 30^\circ$，ΔABC 的面積為 $\sqrt{3}$，

則 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最小值為何？

Ans：6。

3. 已知 A、B、C 為 ΔABC 的內角，若 $z = \dfrac{\sqrt{65}}{5} sin\dfrac{A+B}{2} + i\,cos\dfrac{A-B}{2}$，且 $|z| = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，

則 $tan(A+B)$ 的最小值為何？

Ans：$\dfrac{12}{5}$。

4. 設直線 $x - ky + 2 = 0$ 與拋物線 $x^2 = 8y$ 相交於 A、B 兩點，若線段 $\overline{AB}$ 中點的 y 坐標為 2，

則線段 $\overline{AB}$ 的長度為何？

Ans：$2\sqrt{15}$。

二、 計算證明題：共六大題，計 80 分

1. 已知 ΔABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$\overline{AC} = 12$，$\overline{BC} = 5$，D 為斜邊 $\overline{AB}$ 上動點，今沿著 $\overline{CD}$ 將 ΔBCD 折起，使得 BCD 面垂直 ACD 面，

(1)求 $\overline{AB}$ 的最小值？（5 分）　　Ans：$\sqrt{109}$。

(2)在 $\overline{AB}$ 有最小值時，設 BAC 面與 DAC 面的兩面角為 θ，則 $\tan\theta =$？（5 分）

Ans：$\sqrt{2}$。

2. 竹東高中的多元選修課程共開設了六門選修課：A、B、C 為第一類選修課，D、E、F 為第二類選修課，要求每名同學須從中選修三門課，第一類選修課至少要選兩門。現有甲、乙、丙三位同學選課，則任意一位同學與其他兩位同學均至少有兩門相同選修課的選法共有幾種？(10 分)

Ans：316。

3. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，且 X，Y 均為二階方陣，滿足 $X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$XY=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，

若 $aX+bY=A$，其中 $a>b$，a,b 為定值，試求

(1)數對 $(a,b)=$？（6 分）

(2) $X^{2021}-Y^{2021}=$?（4 分）

Ans：(1)(3, 2)　　(2) $A=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$。

4. 若二次實係數多項式函數 $f(x)$ 滿足 $\begin{cases}-1\le f(1)\le 3\\ 6\le f(2)\le 10\\ 2\le f(4)\le 24\end{cases}$，則 $f(7)$ 的最大值？(15 分)

Ans：81。

5. 設 P 為正△ABC 內部一點滿足 $\overline{AP}=2, \overline{BP}=3, \overline{CP}=\sqrt{7}$，求正△ABC 的邊長？(15 分)

Ans：$\sqrt{19}$。

6. 請分別用代數、向量、幾何及其他方法證明柯西不等式(*Cauchy-Schwarz inequality*)：

設 $a,b,c,d\in R$，$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)$

(20 分，完成 1.2.3.4 種方式各得 5.10.15.20 分)

Ans：略。