# 國立新竹科學園區實驗高級中等學校 110 學年度 第一次教師甄選 試題卷

**甄選科別:高中數學科教師**

**考試科目:數學科專業知識與教材教法**

＊說明：本試題分為：填充題，8 題，佔 40 分；計算與證明題，7 題，佔 60 分；共計 100 分。

＊以下為試題：

## 一、填充題：8 題，每題 5 分，共計 40 分；只需寫出答案即可，全對才給分。

1、已知一單位圓圓 O，且 $\Delta ABC$ 為圓 O 之內接正三角形。若 P 為圓 O 上一動點，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的最大值為何？

2、已知集合 $S=\{1,2,3,\ldots,2021\}$，試求：S 的子集合中，元素和是奇數的集合有多少個？

3、已知 $\{a_n\}$ 為一等比數列，前 $n$ 項和為 $S_n$ $(n\in N)$，且滿足 $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{2}{a_3}$ 與 $S_6=63$。

若 $b_n$ 是 $\log_2(a_n)$ 與 $\log_2(a_{n+1})$ 的等差中項，試求數列 $\left\{(-1)^n b_n^2\right\}$ 的前 $2n$ 項和為何？

4、已知一連續函數$f(x)$，若$\int_{x}^{x+1} f(t)dt = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$，求$f(x)$=____________。

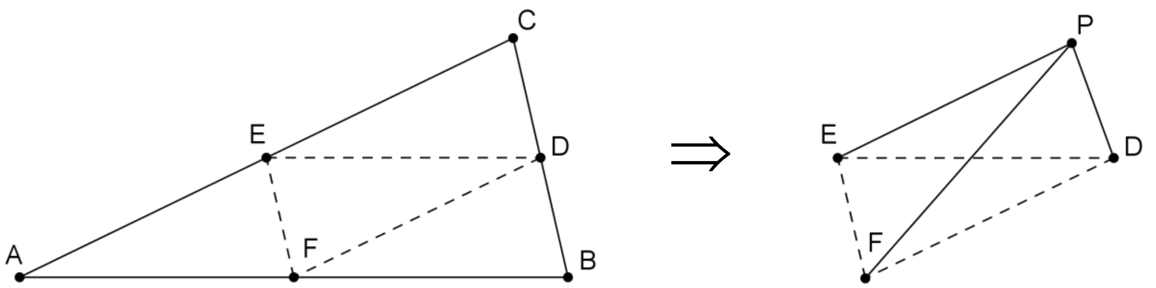
5、如果 $n$ 是一個正整數，當 $n$ 是偶數時，定義$n!! = n \times (n-2) \times (n-4) \times \cdots \times 2$；
當 $n$ 是奇數時，定義$n!! = n \times (n-2) \times (n-4) \times \cdots \times 1$。比如說，$8!!=8\times6\times 4 \times 2 = 384$，$9!!=9\times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 945$。求所有使得 $n!!$整除 $2022!!$的正整數 $n$ 的個數。

6、如果一個$2 \times 2 \times 2$的立方體的一面被染了色(其他面都沒有染色)，然後將立方體切成 8 個$1 \times 1 \times 1$個小立方體，將這 8 個小立方體隨機的組成一個$2 \times 2 \times 2$的立方體。
求新的立方體的 6 個面都沒有任何顏色的機率？

7、已知數列$\{a_n\}$為一正數數列，其前$n$項總和$S_n$滿足：$(S_n)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k)^3$，試求：

數列$\{a_n\}$的前 109 項之總和$S_{109}$為何？

8、已知一個等腰三角形$ABC$，其中$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=2\sqrt{5}$，今依序在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上取各邊中點$D$、$E$、$F$，分別將$\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle CDE$沿著$\overline{EF}$、$\overline{DF}$、$\overline{DE}$折起來，使$A$、$B$、$C$三點重合在$P$點形成一個四面體$P-DEF$ (如下示意圖)，則此四面體$P-DEF$的體積為________________。



**二、計算與證明題：7 題，共計 60 分。每題配分標示於題後。必須寫出過程才給分，採部份給分方式，請儘量作答。**

A、設平面 $E$ 通過（0，0，0），（1，1，1），且與平面 $x+2y-z+3=0$ 的夾角為 $\theta$，若 $|\cos\theta|=\frac{1}{6}$，求 $E$ 的方程式。（8 分）

B、設 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$為 $\Gamma$：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的兩焦點，若 $\overline{AB}$ 為過 $F_2$ 的任一焦弦，求$\triangle ABF_1$ 面積的最小值，並證明之。（8 分）

C、在複數平面上，點 0，$z$，$\frac{1}{z}$，$z+\frac{1}{z}$形成的平行四邊形面積為 $\frac{35}{37}$。$z$ 的實部是正數。如果 d 為$\left|z+\frac{1}{z}\right|$能取到的最小值，計算$d^2$的值。（8 分）

D、已知$\triangle$ABC 的面積是 $\frac{1}{4}$，其外接圓半徑為 1，且 $a,b,c$ 為$\triangle$ABC 的三邊長，試證：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$。（8 分）

E、小胖很喜歡下棋，常常纏着爸爸媽媽跟他對奕。有一天，爸爸對他說：「小胖，我們來一次棋賽吧。媽媽和我是一隊，你自己是另一隊。媽媽和我輪流跟你對奕三局，即媽媽下一、三局，爸爸下第二局或者是爸爸下一、三局，媽媽下第二局，但我們不用三戰兩勝的規則，你要在三局中連贏兩局才算勝利。你想跟我先下還是跟媽媽先下第一局呢？」小胖心裏盤算：「爸爸棋術比媽媽高一點，要勝他比較難。不如和媽媽下第一局，便只用和爸爸碰一次。如果和爸爸下第一局，豈不是要和他碰兩次嗎？好，就這樣決定。」於是他答道：「我和媽媽下第一局。」你認為小胖的選擇是明智之舉嗎？（8 分）

F、在空間中有三條直線：$L_1:\begin{cases}x=t\\ y=0,t\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x=k\\ y=\sqrt{3}k,k\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x=s\\ y=-\sqrt{3}s,s\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$，

以及三顆半徑為 1 的球，其球心分別為 $P$、$Q$、$R$，今使 $P$ 在 $L_1$ 上移動，$Q$ 在 $L_2$ 上移動，$R$ 在 $L_3$ 上移動，試問三顆球所經區域，其交集部分的體積為______。（10 分）

G、下圖的灰色區域，是以 $O_1$ 為圓心，$A$ 和 $B$ 為端點的扇形 $O_1AB$（圓心角為 $2\theta$）和以 $O_2$ 為圓心，$A$ 和 $B$ 為端點的扇形 $O_2AB$（圓心角為 $10\theta$）所圍出的新月形。

若 $\overline{O_1A}=\sqrt{5}$，$\overline{O_2A}=1$，則求 $\sin\theta$ 的值。（10 分）