

科目	數學	得分		注意 事項	<input type="checkbox"/> 使用 <input checked="" type="checkbox"/> 不使用電腦答案卡 <input type="checkbox"/> 可用 <input checked="" type="checkbox"/> 禁用 計算機作答	請勿用鉛筆作答，依照簡章規定不予計分
----	----	----	--	----------	--	--------------------

一、計算證明題

1. 若 a 、 b 、 c 皆為大於 1 的正數

(1) 證明 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ 。(5分)

(2) 若 $a > 3$ ，取函數 $f(x) = \log_a(x-2) + x^3 - 28$ 在閉區間 $[3, a+2]$ 上的圖形與 x 軸有幾個交點？請說明你的答案。(5分)

(3) 若 $\log_b c = \log_a 4$ 且 $a+b=12$ ，當 a 、 b 、 c 皆為自然數時，試求 (a, b, c) 可能的序對為何？(5分)

2. 巴斯卡定理：若 k 、 n 皆為自然數且 $1 \leq k \leq n$ ，則 $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$

(1) 若 n 為自然數且 $n \geq 2$ ，證明

$$C_2^n + C_2^3 + C_2^4 + \dots + C_2^n = C_3^{n+1}。 (5分)$$

(2) 利用(1)，若 n 為自然數，證明

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。 (8分)$$

備註：請使用(1)導出(2)，其它方法不予計分。

3. 若 n 為自然數，證明

$$C_0^n - \frac{1}{2}C_1^n + \frac{1}{3}C_2^n + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}。 (8分)$$

4. (1) 已知 a 、 b 、 $c > 0$ ，證明

$$\frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a} \geq \frac{a+b+c}{3}。 (5分)$$

(2) 已知 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 、 c_1 、 $c_2 > 0$ ，證明

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^3。 (8分)$$

5. 設兩向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，其夾角為 θ ，

定義

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

證明

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta。 (8分)$$

科目	數學	得分		注意 事項	<input type="checkbox"/> 使用 <input checked="" type="checkbox"/> 不使用電腦答案卡 <input type="checkbox"/> 可用 <input checked="" type="checkbox"/> 禁用 計算機作答	請勿用鉛筆作答，依照 簡章規定不予計分
----	----	----	--	----------	--	------------------------

6. 在 $\triangle ABC$ 中，其內角 A 、 B 、 C 所對應的邊分別為 a 、 b 、 c 且 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 4\cos C$ ，
求 $\tan C(\cot A + \cot B)$ 的值。(8分)

7. (1) 若 $A \in M_n(\mathbb{R})$ ，假設存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$ ，使 $AB = I_n$ ，其中 I_n 為 $n \times n$ 的單位方陣，證明 $BA = I_n$ 。(5分)

(2) 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ，求 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

8. 試計算下列各式，需有計算過程，否則不予計分

(1) 求 $\lim_{n \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

(2) 若 $f(x) = [\sin(x^2 + 1)]^x$ ，求 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

(3) 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

(4) 求 $\int \frac{\cos x}{e^x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(10分)