

--	--

臺北市 110 學年度市立普通型高級中等學校

正式教師聯合甄選

數學科 題本

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答

※請先確認你的答案卡(本)、准考證與座位號碼是否一致無誤。如有不同應立即請監試委員處理。使用非本人答案卡(本)作答者，不予計分。

請閱讀以下測驗作答說明

測驗說明：

這是數學科題本，題本採雙面印刷。測驗時間 100 分鐘，作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

作答注意事項：

1. 選擇題部分由電腦閱卷，共 4 題，限使用 2B 鉛筆作答。劃記不清楚致電腦無法判讀，由應考人員自行負責。
2. 非選擇題部分以黑筆或藍筆作答。
3. 劃記任何不相關記號及以其他顏色筆作答者不予計分。考試結束，答案卡(本)務必繳回，未繳回者以零分計算。

請聽到鈴（鐘）聲響後再翻頁作答

試題公告
僅供參考

壹、多選題(共 4 題，每題 5 分。所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。)

1. 下列關於數列與級數的述敘，選出正確的選項。

(A) 一個數列有可能同時是等比數列也是等差數列

(B) 一個數列有可能不是等比數列也不是等差數列

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 必發散

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 必收斂

(E) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-3} + a_{4n-1} + a_{2n})$ 必收斂

2. 在複數平面上， z, z^2, z^3 構成一個直角三角形的三個頂點，且 $|z|=2$ 。請問下列哪些

選項，可以是主幅角 $\text{Arg}(z)$ 的值？

(A) π

(B) $\frac{2\pi}{3}$

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) $\frac{4\pi}{3}$

(E) $\frac{5\pi}{3}$

3. 點 $A(e, 1)$ 在函數 $f(x) = \ln x$ 的圖形上，圓 Q (Q 為該圓的圓心) 與 $y = f(x)$ 的圖形在 A

點有共同的切線，且圓 Q 又與 x 軸相切於 B 點。選出正確的選項。

(A) 以 A 為切點的切線斜率為 $\frac{1}{e}$

(B) 直線 \overline{AQ} 的方程式為 $y - 1 = e(x - e)$

(C) Q 點落在拋物線 $y = \frac{1}{2}(x - e)^2 + \frac{1}{2}$ 上

(D) Q 點在 \overline{AB} 的中垂線上

(E) B 點坐標為 $(\sqrt{e^2 + 1}, 0)$

4. 在可行解區域 $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x + 2y \leq 11 \end{cases}$ 上，目標函數 $P(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ($a \geq 2b > 0$) 的最大值為 1。

選出正確的選項。

(A) $\frac{b}{a} \geq \frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{a} + \frac{5}{b} = 1$

(C) $\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = 1$

(D) $5a + b$ 的最小值為 60

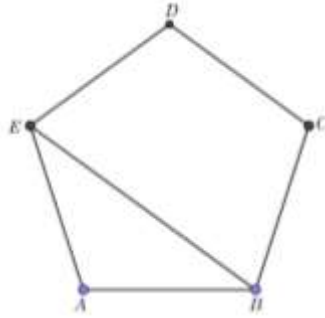
(E) $5a + b$ 的最小值，發生在 $a = 2b$ 時

貳、非選擇題

(一) 填充題(共 8 題，每題 5 分)

- 求兩曲線 $x = y^2$ 和 $x - y = 2$ 所圍成之區域面積。
- 求方程式 $\sqrt[3]{(10+x)^2} + \sqrt[3]{(3+x)^2} = \sqrt[3]{(10+x)(-3-x)} + 7$ 的所有解 x 。
- 將 4 個 a ，2 個 b 及 2 個 c 共 8 個字母排成一列，則相同字母不相鄰的排法有幾種？
- 已知 $f(x)$ 為 10 次多項式，且滿足 $f(k) = \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, \dots, 11$ ，求 $f(12)$ 之值。
- 已知 A 為 $\{1, 2, \dots, 110\}$ 的子集合，且 A 中任兩個元素之和都不為 6 的倍數，求集合 A 的元素個數之最大值。
- 已知 $\triangle OAB$ 內接於拋物線 $y^2 = 8x$ ，其中 O 為原點，且此內接三角形的垂心恰為拋物線的焦點，求 $\triangle OAB$ 的外接圓之圓心坐標。
- 已知 n 為正整數，且方程式 $x^{10} + (nx-1)^{10} = 0$ 的 10 個複數根為 $z_k, \overline{z_k} (k=1, 2, 3, 4, 5)$ ，求 $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{z_k \overline{z_k}}$ 。(以 n 表示)

8. 如下圖， $ABCDE$ 為一正五邊形，令 ΔABE 為三角形 ABE 的面積。



試求：正五邊形 $ABCDE$ 的面積與三角形 ABE 的面積之比值，即

$$\frac{\text{正五邊形的面積}}{\Delta A B E}$$

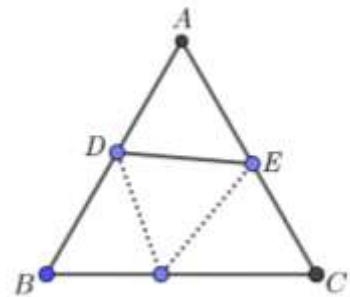
之值。

(二) 計算證明題(共 4 題，每題 10 分)

1. 五人進行「剪刀、石頭、布」的猜拳，五人同時出拳，若能分出勝負（例如：兩人出剪刀，三人出石頭時，算是分出勝負；但五人都出剪刀時，不算分出勝負），則猜拳停止；若分不出勝負，則繼續猜拳，直到分出勝負為止。試求猜拳次數的期望值。

2. 在坐標平面上， A, B, C 三點形成直角三角形，其中 $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 60$ ，又過 A 與 B 兩點的中線方程式分別為 $y = x + 2021$ 與 $y = 2x + 110$ 。試求三角形 ABC 的面積。

3. 如右圖所示，正三角形 ABC 的邊長為 1，且 D, E 分別為邊 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上的點。將三角形 ADE 沿線段 \overline{DE} 摺疊時，頂點 A 恰落在邊 \overline{BC} 上，試問在此條件下，線段 \overline{AD} 的最小值等於多少？



4. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx$ ， $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 。

(1) 證明： $a_n = \frac{n}{n+1} a_{n-2}$ ， $n \geq 2$ 。

(2) 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的值。