新北市立高級中等學校 110 學年度教師聯合甄選
數學科 答案(閱卷版)

一、填充題：60%，每題 6 分

1. $\frac{1}{3}$

2. (-1,4,2)

3. $f(x)=-\dfrac{1}{27}x^3+x-2$ （或 $(x-3)^2(-\frac{x}{27}-\frac{2}{9})$）

4. $\frac{1}{10}$

5. 256

6. $\frac{5}{2}$

7. 28

8. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

9. $9+\frac{25}{4}\sqrt{3}$ （或 $\frac{36+25\sqrt{3}}{4}$ ）

10. 528

二、計算題：40%，每題 10 分

1. 解：令 B,C 坐標分別為 $B(a^2-4,a),C(y^2-4,y)$ 。由 $AB\perp BC$ 可列式得 $y-a=-(a+2)\left(y^2-4-(a^2-4)\right)$。因為 $y\neq a$，上式整理並消除因式 $y-a$ 後可得 $a^2+(2+y)a+(2y+1)=0$。這個 a 的二次方程式有實根，故其判別式大於或等於 0，解得 $y\le 0$ 或 $y\ge 4$。最後檢驗兩端點 $y=0,4$ 確實為解，故所求範圍為 $y\le 0$ 或 $y\ge 4$。

2.(a)

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=\dfrac{by}{z}+\dfrac{cz}{y}} \\ \boldsymbol{b=\dfrac{cz}{x}+\dfrac{ax}{z}} \\ \boldsymbol{c=\dfrac{ax}{y}+\dfrac{by}{x}} \end{cases}$$

等價於

$$\begin{cases} (-ax)\dfrac{1}{x} + (cz)\dfrac{1}{y} + (by)\dfrac{1}{z} = 0 \\ (cz)\dfrac{1}{x} + (-by)\dfrac{1}{y} + (ax)\dfrac{1}{z} = 0 \\ (by)\dfrac{1}{x} + (ax)\dfrac{1}{y} + (-cz)\dfrac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} (-ax)r + (cz)s + (by)t = 0 \\ (cz)r + (-by)s + (ax)t = 0 \\ (by)r + (ax)s + (-cz)t = 0 \end{cases}$$

有非零解

$\Rightarrow$ $$\begin{vmatrix} -ax & cz & by \\ cz & -by & ax \\ by & ax & -cz \end{vmatrix} = 0$$

行列式展開得

$$a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3 + \mathrm{abcxyz} = 0$$

(b)

$$\begin{cases} a = \dfrac{by}{z} + \dfrac{cz}{y} \\ b = \dfrac{cz}{x} + \dfrac{ax}{z} \\ c = \dfrac{ax}{y} + \dfrac{by}{x} \end{cases}$$

等價於

$$\begin{cases} (-1)a + \left(\dfrac{y}{z}\right)b + \left(\dfrac{z}{y}\right)c = 0 \\ \left(\dfrac{x}{z}\right)a + (-1)b + \left(\dfrac{x}{z}\right)c = 0 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)a + \left(\dfrac{y}{x}\right)b + (-1)c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \frac{y}{z} & \frac{z}{y} \\ \frac{x}{z} & -1 & \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} & \frac{y}{x} & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

行列式展開得

$$\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = -1$$

(c)

$$a^3 = \left(\frac{by}{z}\right)^3 + \left(\frac{cz}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{by}{z} + \frac{cz}{y}\right)\left(\frac{by}{z}\right)\left(\frac{cz}{y}\right)$$

$$= \left(\frac{by}{z}\right)^3 + \left(\frac{cz}{y}\right)^3 + 3abc \qquad (1)$$

同理

$$b^3 = \left(\frac{cz}{x}\right)^3 + \left(\frac{ax}{z}\right)^3 + 3abc \qquad (2)$$

$$c^3 = \left(\frac{ax}{y}\right)^3 + \left(\frac{by}{x}\right)^3 + 3abc \qquad (3)$$

(1), (2), (3) 兩端相加得

$$2(a^3+b^3+c^3) = (a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) + 9abc$$

$$= -abcxyz\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) + 9abc$$

$$= abc\left(9 - \left(\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}\right)\right)$$

$$= 10abc$$

故 $a^3 + b^3 + c^3 - 5abc = 0$