臺中市立臺中女子高級中等學校 110 學年度第一次教師甄選 <u>數學科</u> 試題

一、填充題：每格 4 分，全對才給分，共 76 分。

1. 有一個三位數滿足數字重新排列後所得之最大數與最小數的差值為原三位數，則此三位數為________。

2. 設函數 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$，若正實數 t 滿足 $f(t+16)-f(t-16)=2$，則 $t=$________。

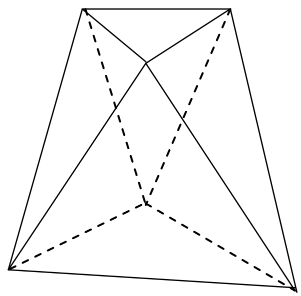
3. 函數 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+12-6\sqrt{2}}+\sqrt{x^2-12x+39-2\sqrt{2}}$，其中 x 為實數，則 $f(x)$ 的最小值為________。

4. 將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這 9 個數字隨機填入 3×3 的方格表中，每個小方格恰填寫一個數字，且所填的數各不相同，則使每行、每列之和都是奇數的機率為________。

5. 坐標平面上，一直線通過點 $(1,2)$ 且與雙曲線 $xy=1$ 交於相異二點 P,Q，則 $\overline{PQ}$ 的最小值為________。

6. 設 z 、ω 為複數且 $|z|=2$ 、$|\omega|=1$，則 $\left|z^2-4\omega^2+7z\omega\right|$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$________。

7. 右圖為一八面體，頂部與底部均為正三角形，邊長分別為 15 、27 單位，側面均為等腰三角形且腰長為 a 單位，若此四面體的高，即頂部平面與底部平面的垂直距離為 $\sqrt{141}$，則 $a=$________。



8. 設一函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{12}x^3-2x^2+px+q$，若自原點 $(0,0)$ 作曲線 $y=f(x)$ 之二切線互相垂直，則實數數對 $(p,q)=$________。

9. 在 ΔABC 中，D 是 $\overline{BC}$ 的中點，E 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{BE}=2\overline{EA}$，$\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於點 O。若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，則 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=$________。

10. 設函數 $f(x)=\begin{cases}|x+1| & ,x\le 0\\ |\log x| & ,x>0\end{cases}$，若方程式 $f(x)=a$ 有四個不同的實數解 x_1,x_2,x_3,x_4，其中 $x_1<x_2<x_3<x_4$，則 $x_3(x_1+x_2)+\frac{1}{x_3^{\ 2}x_4}$ 的最大值為________。

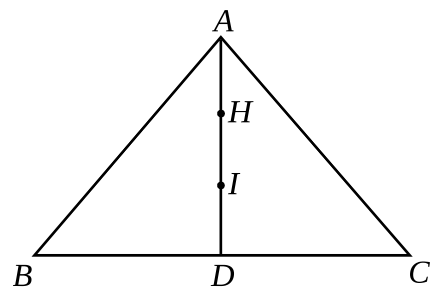
11. 平面上一點 P 以原點為中心，逆時針旋轉 α 角，再對過原點的直線 L 作鏡射後得 Q 點，已知 P 、Q 兩點對稱直線 L' ：$y=5x$，且 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，則直線 L 的斜率為________。

12. 設 ΔABC 中 $\overline{AB}=2$、$\overline{AC}=3$、$\overline{BC}=4$，分別在 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 上任取一點 P 、Q，使得四邊形 $PBCQ$ 的面積和周長均為 ΔAPQ 的 2 倍，則 $\overline{PQ}=$________。

13. ΔABC 中，已知 A 點坐標為 $(-1,2)$，過 B 點之中線及過 C 點之中線所在的直線方程式分別為 $3x+2y=7$ 與 $x-2y=13$，則 C 點坐標為________。

14. ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=6$、$\overline{AC}=9$、$\overline{BC}=12$，I 為 ΔABC 之內心，過 I 作一直線分別交 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 於 M 、N，則 ΔAMN 之最小面積為________。

15. 如圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$I$ 為其內心，H 為其垂心，其中 $\overline{IH}=\overline{ID}$，則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{HD}}=$________。



16. 某監測站附近有一颱風，颱風中心 P 位於監測站 O 的東偏南 θ 弧度（其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$）的方向且距離 300 公里的海面上，並以每小時 20 公里的速度向西偏北 $\dfrac{\pi}{4}$ 弧度的方向移動。若颱風侵襲範圍為圓形區域，目前半徑為 60 公里，並以每小時 10 公里的速度不斷增大，且颱風的行進方向和速度都不變，則該監測站受到颱風的侵襲會持續_______小時。

17. 設 x,y 皆為不超過 50 的正整數，若 $6x+2y-3x\left[\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right]=0$，其中 $[\ \ ]$ 表示高斯符號，則滿足上述條件的數對 (x,y) 共有________組。

18. 若將 m 個互不相同的正偶數和 n 個互不相同的正奇數全部相加，得總和為 2025，所有滿足上述的自然數 m,n 中，$3m+4n$ 的最大值為________。

19. 某西洋棋比賽規定，由對戰的兩名選手輪流執白棋先行，直到其中一名選手連勝兩場時比賽結束。依過去經驗，甲、乙兩人比賽西洋棋，當甲先行時，甲贏的機率為 $\dfrac{3}{5}$；當乙先行時，乙贏的機率為 $\dfrac{3}{5}$。今甲、乙兩人比賽，由甲執白棋先行，假設每次輸贏皆為獨立，且過程中均無和局，則比賽場數的期望值為________。

二、計算證明題：請寫出詳細計算與證明過程，否則不予給分，共 24 分。

1. 設 $a,b,c>0$，試證明：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$。

2. 過曲線 $y=x^3$ 上一點 P 有兩條切線與 $y=x^3$ 相切，它們分別交 x 軸於點 A 與 B，令銳角 $\angle APB=\theta$，則 $\tan\theta$ 之最大值為何？

3. 已知一數列 $\langle a_n\rangle$，$a_1=4$，$a_2=5$，若 $a_n=\dfrac{a_{n-1}^2-1}{a_{n-2}}$，$n\geq 3$，$n\in\mathbb{N}$，

(1)求此數列的一般項 a_n。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2021}\frac{1}{\sqrt{a_n}}$ 的整數部分為何？