

-----分-----隔-----線-----

一、填充題：共二十題，每題全對得 5 分。

1. 設  $(\frac{5}{2})^x = 4^{-\frac{1}{y}} = 10$ ，則  $y^3 - x^3 + 3xy =$  \_\_\_\_\_。

2. 若數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 1$ ， $a_n = \frac{a_{n-1}}{1+2a_{n-1}}$ ， $n \geq 2$ ， $n \in N$ ，則  $a_n =$  \_\_\_\_\_。(以  $n$  表示)

3.  $S_n = \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} =$  \_\_\_\_\_。

4. 設  $n$  為自然數，若  $C_0^n + \frac{1}{2}C_1^n + \frac{1}{3}C_2^n + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{4095}{n+1}$ ，則  $n =$  \_\_\_\_\_。

5. 從 1~20 的自然數中，任取相異三數，若假設每個數字被取的機會均等，則取出的數中任兩個數都至少差 3 (包含 3) 的機率為\_\_\_\_\_。

6. 設  $f(x)$  為可微分函數，若  $f(1) = a$ ， $f'(1) = b$ ， $a, b \in R$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(x^2)}{x-1} =$  \_\_\_\_\_。(以  $a, b$  表之)

7. 甲、乙、丙、丁、戊等 5 人，每人都會洗碗，也會做飯，但每餐飯，做飯者不洗碗，某假日午、晚兩餐，做飯者非同一人，洗碗者也非同一人，問有\_\_\_\_\_種情形。

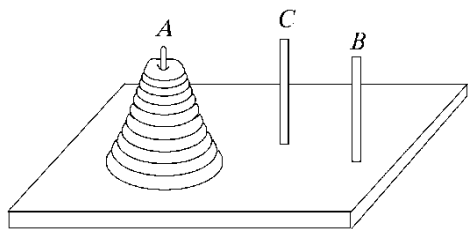
8. 已知有  $n$  個正整數，其中有一數是 277， $n$  個數的平均數是 45；若將 277 移除，剩下來  $n-1$  個數的平均數是 37，試問這  $n$  個正整數中最大數的最大值是\_\_\_\_\_。

-----分-----隔-----線-----

9. 有一種被稱作『1A2B』的猜數字益智遊戲。規則如下：

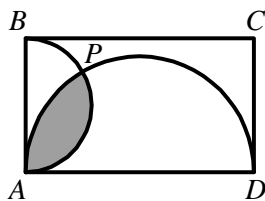
首先出題者由 0, 1, 2, ..., 9 當中任取相異四個數字由左到右排成一列（0 可以在最前面），讓猜題者去猜這組數字。每次猜完數字後出題者會給猜題者提示，提示的口訣為『 $mAnB$ 』，其中  $mA$  表示所猜的數字當中有  $m$  個不但猜中了而且數字是在正確的位置， $nB$  表示所猜的數字當中有  $n$  個猜中了但是數字的位置不正確，例如題目為 7132，若猜題者猜 1234，則提示『1A2B』。假使猜題者善用提示，請問他在第 1 次猜到『1A3B』且在第 2 次猜到『4A0B』的機率是 \_\_\_\_\_。

10. 如圖， $A$  柱中有  $n$  個大小不同的圓盤由大而小往上堆疊，若要從  $A$  柱全部搬移至  $B$  柱，每次只能搬動一圓盤，且每次都必須先經中間柱（不可由  $A$  直接放入  $B$ ）且大盤不可放在小盤之上，設共要搬動  $a_n$  次，若  $a_{n+1} = pa_n + k$ ，求數對  $(p, k) =$  \_\_\_\_\_。



11. 三次曲線  $y = x^3 + ax^2 + x + 1$ ，若由原點可作三條相異的切線，求  $a$  的範圍為\_\_\_\_\_。

12. 參考下圖，矩形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 2\sqrt{6}$ ， $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ ，以  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$  為直徑作半圓交於  $P$ ，則鋪色區域面積為\_\_\_\_\_。

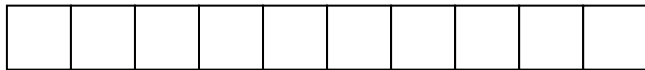


13. 已知  $z \neq 1$ ，且  $z^7 = 1$ ，求  $z + z^2 + z^4 =$  \_\_\_\_\_。

14.  $n \in \mathbb{N}$ ，若  $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ ，其中  $a_n, b_n$  為有理數，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$  \_\_\_\_\_。

-----分-----隔-----線-----

15.  $n \in \mathbb{N}$ , 已知  $a_1=1$ , 且  $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$  時,  $f(x) = a_n x^n$ , 若  $f(x)$  在區間  $(0, 1]$  為連續, 則  $a_n$  = \_\_\_\_\_。
16. 已知三次函數  $y = f(x)$  的廣域特徵圖形近似  $y = -2x^3$ , 在  $x = -2$  附近的一次近似為  $y = -2x - 1$ , 且  $y = f(x)$  圖形的對稱中心為  $(-2, k)$ , 試求  $f(1.99) =$  \_\_\_\_\_。
17. 用紅、綠兩色將下方格子塗色, 若紅色格子的右邊不能緊接著紅色, 且每一個格子都要上色, 則共有 \_\_\_\_\_ 種著色方法。



18. 袋中有 4 紅球, 6 白球, 今自袋中每次取出一球, 取出不放回, 取完為止, 則取球過程中, 紅球個數不多於白球個數的機率為何? \_\_\_\_\_。
19. 桃高實驗室針對 800 件血液樣本作檢驗, 檢驗方式如下: 隨機平分成 100 組, 每組 8 件血液樣本, 將同一組的樣本混合成一組樣本作一次檢驗。假設每一件血液樣本檢驗呈陽性機率都是 0.2, 且只要有一件血液樣本呈陽性反應, 其混合的樣本也會呈陽性反應。當一組混合樣本檢驗結果呈陰性反應時, 就不須再作細部檢驗, 即該組只要一次檢驗即可。當檢驗結果呈陽性反應時, 就必須重新將該組 8 件血液樣本逐一檢驗。依上述檢驗方式, 此 800 件血液樣本檢驗次數的期望值為 \_\_\_\_\_。
20. 從  $z^{2020} = 1$  的所有複數根中, 任選相異兩根  $z_1, z_2$ , 則  $|z_1 - z_2| < \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$  的機率為 \_\_\_\_\_。