國立竹北高中　110 年　第 1 次教師甄試
數學科　試題卷

(請考生自填)　准考證號碼：C10030　　姓名：＿＿＿＿＿＿

第一部分：填充題(請將答案填寫於答案卷上)

1. 高三上期末考結束後，大雄想請假在家讀書以全力準備學測，但學校規定「連續三日以上 (含三日) 請假需請家長到校證明」，若大雄每天可以自由選擇上學或請假，而且他不想麻煩雄爸到校證明，那大雄本週一到週五出缺席的狀況有＿＿＿＿＿種。

2. 投擲一枚不均勻的硬幣，已知正面出現的機率是 $\frac{1}{3}$，反覆投擲，設數列$\langle a_n \rangle$定義如下：

$$a_n = \begin{cases} 1\text{，第}n\text{次投擲出現正面} \\ -1\text{，第}n\text{次投擲出現反面} \end{cases}$$，若$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，則事件「$S_8 = 2$」的機率為＿＿＿＿＿。

3. 若一個正八面體的頂點恰好為一個正立方體各面的中心點(即各面對角線之交點)，設正八面體的體積為a，正立方體的體積為 b，求$\frac{a}{b}$=＿＿＿＿＿。(以最簡分數表示)

4. 設ω為方程式$x^5=i$的一根，試求$|1-\omega|$的最大值。________（請以$a\sin\theta$表示，其中$a>0$，θ為銳角）

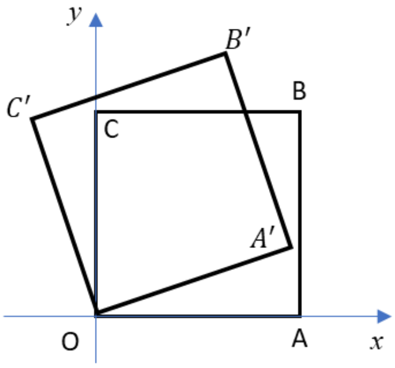
5. 設α是方程式$\boldsymbol{log_3 x+x-3=0}$的一根，β是方程式$\boldsymbol{3^x+x-3=0}$之一根，則$\boldsymbol{log_3 x+3^{\beta}=}$________。

6. 若a，b，c表△ABC之三邊長，且a，b，c為方程式$x^3-10x^2+44x-14=0$的三根，則△ABC的面積為________。

7. 一個凸四邊形$ABCD$，已知$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=5$，且$\angle ADC=\angle ABC=90°$，則內積$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=$________。

8. 箱子裡有 3 個 1 號球，3 個 2 號球，3 個 3 號球，‧‧‧，3 個 22 號球，共 66 個球。隨機從箱中取球，一次取 1 球，取後不放回，取 3 次，其值依序為 x_1, x_2, x_3，則 $x_1 < x_2 < x_3$ 的機率為____________。

9. 相機的影像是光線投射在一片長方形的感光元件(CMOS)上，再轉換為電子訊號儲存在記憶體中，我們看到的相片為由此感光元件接收到之光線所呈現。已知相機在拍攝時，因為光線的折射與感光元件等因素會導致影像變形。假設有一款手機上的相機，在初始設計上影像會產生線性變形，即照片上的影像為真實影像產生旋轉、伸縮、推移等線性變換。如右圖，為了校正此變形，設定一個座標平面上的正方形 ABCD，其中 O 為原點，A(1 , 0)、B(1 , 1)、C(0 , 1)，以此相機拍攝此正方形後，相片上呈現平行四邊形$\boldsymbol{OA'B'C'}$的影像，其中 A、B、C 分別變換至$\boldsymbol{A'}$、$\boldsymbol{B'}$、$\boldsymbol{C'}$，且$\boldsymbol{A'}\left(\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{25}},\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{25}}\right)$、$\boldsymbol{C'}\left(\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{7}},\mathbf{1}\right)$。工程師發現此變形是影像先產生沿 x 軸方向的推移變換，然後再以原點 O 為中心旋轉$\boldsymbol{\theta}$角所導致，於是工程師利用軟體將照片上的影像坐標先旋轉$\boldsymbol{-\theta}$角，再經由一個二階方陣 M 線性變換為正確的影像坐標，則此方陣 M 為____________。



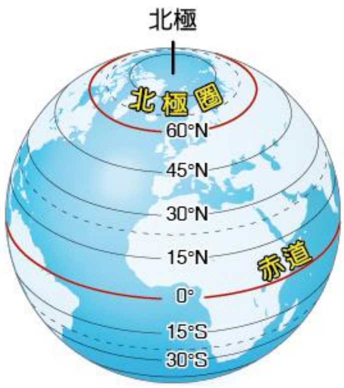
10. 一數列$\langle a_n \rangle$滿足遞迴式$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=2a_{n-1}+2^n \quad (n>1) \end{cases}$，試求一般式$a_n=$____________。

11. 將 4 個相同的紅球與 4 個相同的藍球隨意排成一列，由左至右每個球依序對應標號 1, 2, 3, …, 8，則 4 個紅球對應號碼和小於 4 個藍球對應號碼和的排列數共有____________種。

12. 坐標平面上一直線$x-my=n$ $(n>0)$過點$A(5\sqrt{3},5)$，若$\begin{cases} x-my\le n \\ x-\sqrt{3}y\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$所圍成之區域的外接圓直徑為 20，則$n=$____________。

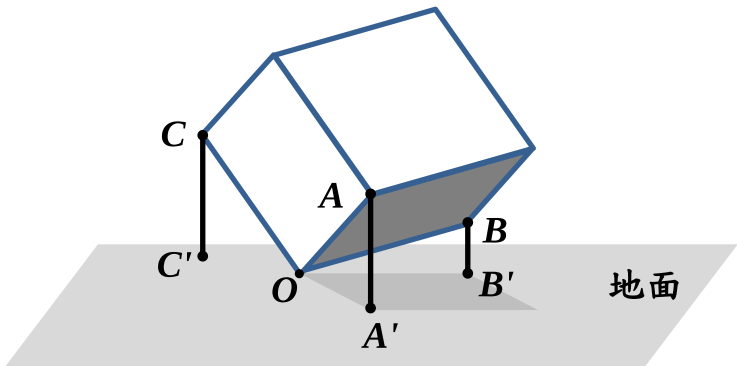
13. 坐標平面上，在圓$\boldsymbol{\Gamma}: \boldsymbol{x^2+y^2=4}$上取兩點 A、B，使此兩點在 x 軸上方，且摺回劣弧$\overset{\frown}{\boldsymbol{AB}}$使其恰與 x 軸相切於$(\mathbf{1},\mathbf{0})$，則直線$\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$的直線方程式為____________。

14. 假設地球是完美的球形，沿著北緯 60° 線將地球剖成兩塊，若小塊的體積：大塊的體積比=1：$\dfrac{\left(a+b\sqrt{3}\right)^2}{c}$，其中 $a,b,c\in N$，且 c 為質數。求數組 (a,b,c) =____________ 。



15. 有一個不公正的硬幣，投出正面的機率為 $\frac{2}{3}$，投出反面的機率為 $\frac{1}{3}$，若投擲 50 次，則硬幣出現 $2k$ 次(k=0，1，2，⋯，25)正面的機率為 $\frac{1}{a}(b+\frac{1}{c^d})$，其中 $a,b,c,d\in N$，且 c 為質數。求數組 (a,b,c,d) =____________ 。

16. 一個正立方體的裝置藝術斜立在公園的平地上，如圖所示。為了穩固此裝置藝術，除了將 O 點落在地面上，還在 A、B、C 四處各架上一根垂直地面的鐵柱，分別為 $\overline{AA'}$ 、$\overline{BB'}$ 與 $\overline{CC'}$ 。已知此正立方體的邊長 5 公尺，且 $\overline{AA'}=3$，$\overline{BB'}=2$，則 $\overline{CC'}$ =____________公尺。



第二部分：計算題(請將答案填寫於答案卷上)

1. 設 $f(x), g(x)$ 為可微分函數，請證明 $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$。(5 分)

2. 坐標平面上，將點 P (x, y) 以原點為中心旋轉 θ 角得到 $\mathrm{P}'(x', y')$，設二階方陣 A 使得 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，

請證明 A=$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$。(5 分)

3. 設 a 為實數，試證：$f(x) = x^3 - 3x^2 + (3 + a^2)x - a^2$ 為遞增函數。

(1)針對高一學生，使用配方三次式的方法說明。(5 分)

(2)針對高三學生，使用一階導函數觀念說明。(5 分)