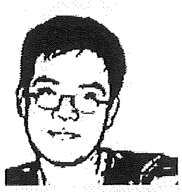
101-全國高中教師聯招 詳解整理

1. 單選

解：借解 👍

weiye
瑋岳



發短消息　加爲好友
當前離線

發表於 2012-6-4 12:44 只看該作者

回復 30# bombwemg 的帖子

題述三個三位數越大越好，

可知 $a_1, a_4, a_7 \in \{9,8,7\}$

$\Rightarrow a_2, a_5, a_8 \in \{6,5,4\}$

$\Rightarrow a_3, a_6, a_9 \in \{3,2,1\}$

此時，可得 $a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 + a_7a_8a_9$ 爲定值，

由算幾不等式可推知，當 $a_1a_2a_3$, $a_4a_5a_6$, $a_7a_8a_9$ 這三個三位數間互相越接近時，此三數的乘積越大，

得此三數爲 $941, 852, 763$ 時，三數乘積爲最大。

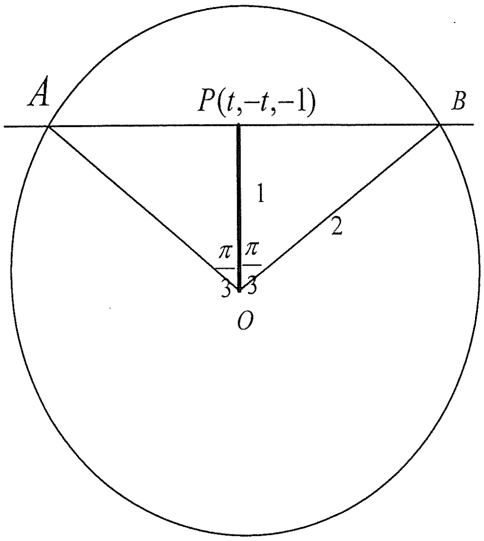
2. 單選

解：

(1) $L:\begin{cases} x+y-3z=3 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$ ⇨ $L:\begin{cases} z=-1 \\ x+y=0 \end{cases}$ ⇨ 令 $P(t,-t,-1)$

(2) $\overline{OP}=\sqrt{t^2+(-t)^2+1}=\sqrt{2t^2+1}$ ⇨ 當 $t=0$，$\overline{OP}=1$ 最短

(3) AB 弧長 $=r\theta=2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$　　###



3. 單選

解：

X	Y	$X-\mu_X$	$Y-\mu_Y$	$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$
89	75	17	9	153
65	57	-7	-9	63
76	65	4	-1	-4
69	65	-3	-1	3
82	83	10	17	170
57	63	-15	-3	45
66	58	-6	-8	48
72	62	0	-4	0
78	63	6	-3	-18
66	69	-6	3	-18
$\mu_X = 72$	$\mu_Y = 66$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 442$

(1) $r_{XY} = \frac{1}{n}\sum(\frac{x_i-\mu_X}{\sigma_X})(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}) = \frac{1}{n\sigma_X\sigma_Y}\sum(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)$

$= \frac{1}{10\times 8.9\times 7.5}\times 442 = 0.662$ ###

4. 單選

解：

(*) α,β,γ 為 $2x^3+x^2-x-7=0$ 三根

(1) $2x^3+x^2-x-7 = 2(x-1)^3+7(x-1)^2+7(x-1)-5$

$= 2X^3+7X^2+7X-5=0$ （令 $X=x-1$）

⇨ $(\alpha-1)=A,(\beta-1)=B,(\gamma-1)=C$ 為 $2X^3+7X^2+7X-5=0$ 的三根

⇨ $\frac{1}{A},\frac{1}{B},\frac{1}{C}$ 為 $5X^3-7X^2-7X-2=0$ 三根 ⇨ $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{7}{5}$ ###

5. 單選

解：借解 👍

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\ldots+n^2)(1^5+2^5+\ldots+n^5)}{(1^3+2^3+\ldots+n^3)(1^4+2^4+\ldots+n^4)} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(1^5+2^5+\ldots+n^5)}{n(n+1)(1^4+2^4+\ldots+n^4)}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^6(2n+1)(\frac{1}{n})\left((\frac{1}{n})^5+(\frac{2}{n})^5+\ldots+(\frac{n}{n})^5\right)}{n^6(n+1)(\frac{1}{n})\left((\frac{1}{n})^4+(\frac{2}{n})^4+\ldots+(\frac{n}{n})^4\right)} = \frac{2}{3}(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1})\cdot(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left((\frac{1}{n})^5+(\frac{2}{n})^5+\ldots+(\frac{n}{n})^5\right)}{\frac{1}{n}\left((\frac{1}{n})^4+(\frac{2}{n})^4+\ldots+(\frac{n}{n})^4\right)})$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{\int_0^1 x^5dx}{\int_0^1 x^4dx} = \frac{10}{9}$$

6. 單選

解：

(1) $(\sin\theta + i\cos\theta)^n = [\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]^n \quad = \cos(\frac{n\pi}{2}-n\theta) + i\sin(\frac{n\pi}{2}-n\theta)$

(2) $\cos(\frac{n\pi}{2}-n\theta) + i\sin(\frac{n\pi}{2}-n\theta) = \sin n\theta + i\cos n\theta$ ⇨ $\frac{n\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ⇨ $n = 4k+1$

⇨ $k = 0,1,2,\ldots,27$ ⇨ $n = 1,5,9,\ldots,109$ ⇨ $1+5+9+\ldots+1109 = 1540$ ###

7. 單選

解：

(1) 設 $f(x) = a(x-101)(x-103)(x-104) + b(x-101)(x-103) + c(x-101) + 2012$

⇨ $c = 2, b = -3, a = 3$

(2) $f(x) = 3(x-101)(x-103)(x-104) - 3(x-101)(x-103) + 2(x-101) + 2012$

⇨ $f(102) = 2023$ ###

另解：

(1) 設 $f(x) = 2012 \times \frac{(x-103)(x-104)(x-105)}{(101-103)(101-104)(101-105)} + 2016 \times \frac{(x-101)(x-104)(x-105)}{(103-101)(103-104)(103-105)}$

$+ 2009 \times \frac{(x-101)(x-103)(x-105)}{(104-101)(104-103)(104-105)} + 2020 \times \frac{(x-101)(x-103)(x-104)}{(105-101)(105-103)(105-104)}$

(2) ⇨ $f(102) = 2023$ ###

8. 複選題

解：

(1) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+(1+2)} + \ldots + \frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+20)} = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(1+2+\ldots+k)}$

$= \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}} = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} = \sum_{n=1}^{20} \frac{6}{n(n+1)(n+2)} = 6 \times \frac{1}{2}(\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{21\times 22}) = \frac{115}{77}$ ###

9. 複選題

解：借解

(1)

選擇第 9 題

(A) 拉格朗日插值法

(B) 設 f(x) = bx^2 + cx + a (b 不為 0)
分別以 f(1)，f(2)，f(3) 解聯立，可求出 b = 0，c = 1，a = 0
不合

(C) f(1) = 1，f(3/2) = (24 - a)/16 可能小於 0，故此選項錯誤

(D) a > 0，2 < x < 3
(-a/6)(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0
(-1)x(x - 1)(x - 3) > 0
(1/2)x(x - 2)(x - 3) + (1/2)x(x - 1)(x - 2) = (1/2)x(x - 2)(2x - 4) > 0
f(x) 恆大於 0
此選項正確

10. 複選題

解：

(A) 由圖：A_n面積$<ABCD$面積$=4$

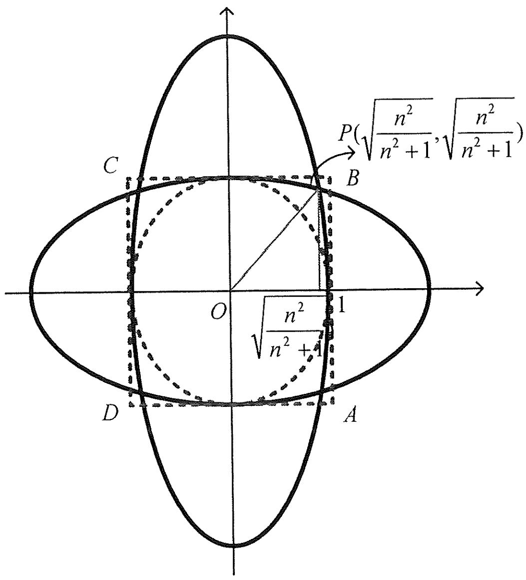
(B) 由圖：A_n面積$>$圓O面積$=\pi$

(C) 由圖：A_n周長$>$圓O周長$=2\pi>5$

(D) 由圖：$\frac{1}{2}(\frac{n^2}{n^2+1})\times 8\le A_n$面積$\le ABCD$面積$=4$

⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2}{n^2+1})\times 8\le \lim\limits_{n\to\infty}A_n$面積$\le \lim\limits_{n\to\infty}ABCD$面積$=4$

⇨ $4\le \lim\limits_{n\to\infty}A_n$面積$\le 4$ ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$面積$=4$ ###



1. 填充

解：

(1) 中心 $(1,2)$ 代入：$\begin{matrix} 3x+ay+1=0 \\ 3x+by-7=0 \end{matrix}$ ⇨ $\begin{matrix} a=-2 \\ b=2 \end{matrix}$ ⇨ $\begin{matrix} 3x-2y+1=0 \\ 3x+2y-7=0 \end{matrix}$

(2) $P(3,0)$ 到兩漸近線距離積：$\dfrac{|9-0+1|}{\sqrt{3^2+2^2}}\times\dfrac{|9+0-7|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{20}{13}$ ###

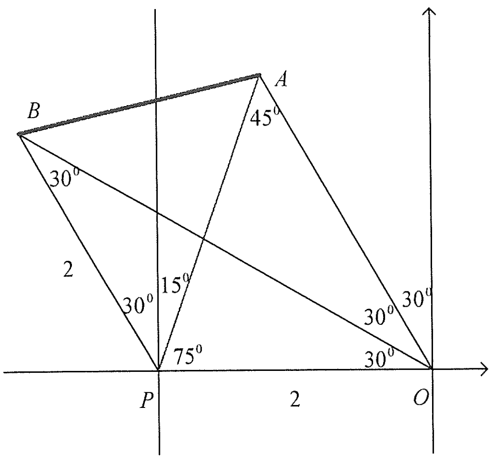
2. 填充

解：

(1) 如圖：$\angle PBO=30^0$ ⇨ $\overline{PB}=2$

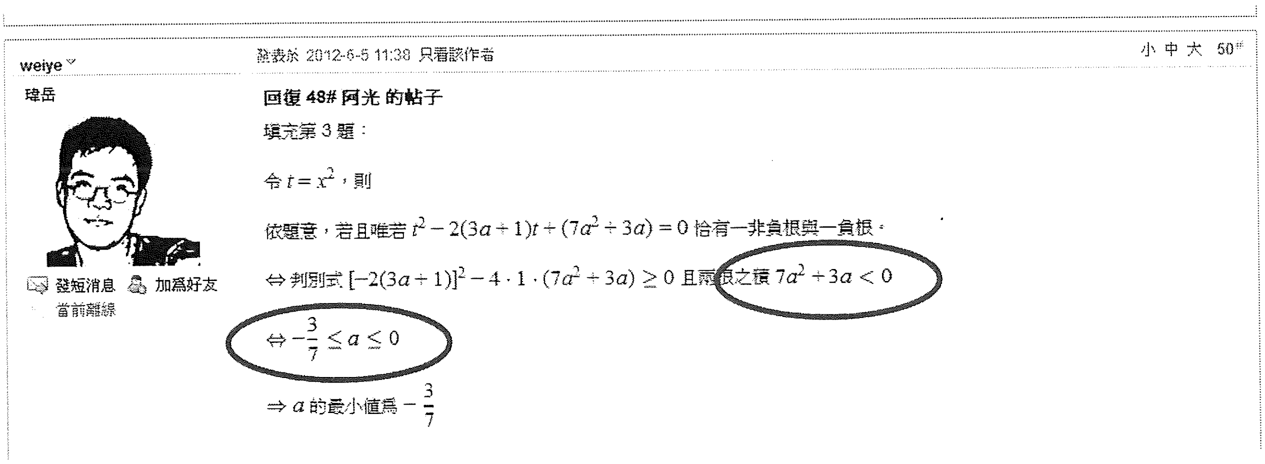
(2) ΔAPO 中：$\dfrac{2}{\sin 45^0}=\dfrac{\overline{AP}}{\sin 60^0}$ ⇨ $\overline{AP}=\sqrt{6}$

(3) ΔAPB 中：$\cos 45^0=\dfrac{2^2+(\sqrt{6})^2-(\overline{AB})^2}{2\times 2\times\sqrt{6}}$ ⇨ $\overline{AB}=\sqrt{10-4\sqrt{3}}$ ###



3. 填充

解：



weiye

瑋岳

發短消息 加爲好友

當前離線

發表於 2012-6-5 11:38 只看該作者

小 中 大 50#

回復 48# 阿光 的帖子

填充第 3 題：

令 $t=x^2$，則

依題意，若且唯若 $t^2-2(3a+1)t+(7a^2+3a)=0$ 恰有一非負根與一負根。

⇔ 判別式 $[-2(3a+1)]^2-4\cdot 1\cdot(7a^2+3a)\geq 0$ 且兩根之積 $7a^2+3a<0$

⇔ $-\frac{3}{7}\leq a\leq 0$

⇒ a 的最小值爲 $-\frac{3}{7}$

(*) $x^4-2(3a+1)x^2+7a^2+3a=0$ ⇨ $A^2-2(3a+1)A+7a^2+3a=0$ （令 $A=x^2$）

(1) x 有兩實根，A 可能：(1*)判別式 $\Delta\geq 0$

{(i)一正根、一負根 (ii)一零根、一負根 (iii)兩零根}

(1*) 判別式 $\Delta\geq 0$ ⇨ $4(3a+1)^2-4(7a^2+3a)\geq 0$ ⇨ $a\leq -1$ 或 $a\geq -\frac{1}{2}$

(i) 一正根、一負根 ⇨ $\alpha\beta<0$ ⇨ $7a^2+3a<0$ ⇨ $-\frac{3}{7}<a<0$

(ii) 一零根、一負根 ⇨ $7a^2+3a=0$ ⇨ $a=-\frac{3}{7}$、$a=0$ (不合)

(iii) 兩零根 ⇨ $2(3a+1)=0$、$7a^2+3a=0$ (不合)

(2) 綜合(1*)(i)(ii)(iii)：$-\frac{3}{7}\leq a<0$ ###

4. 填充

解：

(*) $(1-4x)[f(x)+x(f(x))^2]=1+x^3g(x)$，$\deg f(x)=2$ ⇨ 令 $f(x)=ax^2+bx+c$

(1) $(1-4x)[f(x)+x(f(x))^2]=1+x^3g(x)$：

(i) 代 $x=0$ ⇨ $f(0)=1$ ⇨ $c=1$

⇨ $(1-4x)[ax^2+bx+1+x(ax^2+bx+1)^2]=1+x^3g(x)$

(ii) 比較 x 項：$bx+x-4x=0$ ⇨ $b=3$

(iii) 比較 x^2 項：$ax^2+2bx^2-4bx^2-4x^2=0$ ⇨ $a=10$

(2) $f(x)=10x^2+3x+1$ ###

5. 填充

解：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}=b$ 是 $\frac{0}{0}$ 型 ⇨ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x+x^2})^2-(1+ax)^2}{x^2(\sqrt{1+x+x^2}+1+ax)}$

⇨ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x+x^2)-(1+2ax+a^2x^2)}{x^2(\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax))}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+x^2)-(2ax+a^2x^2)}{x^2(\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax))}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1+x)-x(2a+a^2x)}{x^2(\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax))}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)-(2a+a^2x)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax))}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型

⇨ $(1+0)-(2a+0)=0$，$a=\frac{1}{2}$ ###

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-(2a+a^2x)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax))}$ ⇨ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{4}x}{x(\sqrt{1+x+x^2}+(1+\frac{1}{2}x))}$

⇨ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+x+x^2}+(1+\frac{1}{2}x)}=\dfrac{3}{8}$ ###

6. 填充

解：

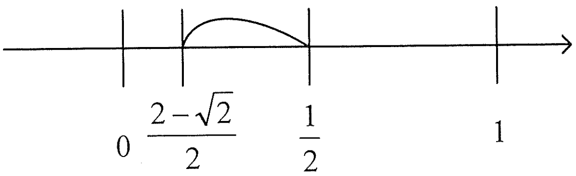
x	偶	偶	奇	奇
y	偶	奇	偶	奇
z	奇	奇	奇	偶
機率	p^2q	pq^2	pq^2	pq^2

(1) 由表得：$f(p)=p^2q+3pq^2$

(2) 令 $f(p)=p^2q+3pq^2=\dfrac{1}{2}$ ⇨ $p^2(1-p)+3p(1-p)^2=\dfrac{1}{2}$ ⇨ $4p^3-10p^2+6p-1=0$

⇨ $(2p-1)(2p^2-4p+1)=0$ ⇨ $p=\dfrac{1}{2}$，$p=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

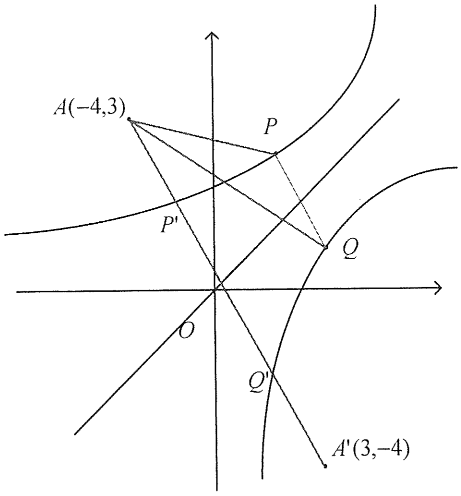
(3) $f(p)=p^2q+3pq^2>\dfrac{1}{2}$ ⇨ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<p<\dfrac{1}{2}$ ###



7. 填充

解：

(1) 因為 $\overline{AP}+\overline{AQ}>\overline{PQ}$ 當 $P=P'$、$Q=Q'$，$\overline{AP'}+\overline{AQ'}=\overline{AA'}$ 最小，又 $\overline{AA'}=7\sqrt{2}$ ###



(2) 說明：對任一 $P \neq P'$ 、 $Q \neq Q'$ ⇨ $\overline{AP} = \overline{A'Q}$ ， $\overline{AP} + \overline{AQ} = \overline{AQ} + \overline{A'Q} > \overline{AA'}$ ###

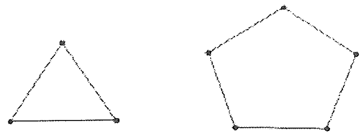
8. 填充

解：借解

填充 8:

sol: 考慮圖上 8 個點代表 8 個人，每一人都恰跟另外兩人不認識，把不認識的兩人連起來，也就是說圖上每一個點都必須與另外兩點連起來，總共有三種情況:

(1) 一個 3cycle 與一個 5cycle

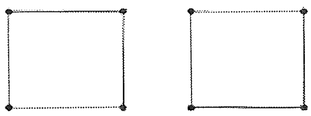


$$C_3^8 C_5^5 \times \frac{2!}{2} \times \frac{4!}{2} = 672\ (\text{種})$$

$\frac{2!}{2} \times \frac{4!}{2}$ → 3人排項圈，5人排項圈

$C_3^8 C_5^5$ → 8人分成兩堆分別為3人、5人

(2) 兩個 4cycle

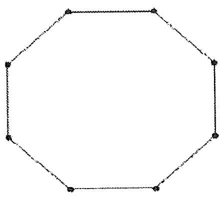


$$C_4^8 C_4^4 \times \frac{1}{2!} \times \frac{3!}{2} \times \frac{3!}{2} = 315\ (\text{種})$$

$\frac{3!}{2} \times \frac{3!}{2}$ → 4人排項圈，4人排項圈

$C_4^8 C_4^4 \times \frac{1}{2!}$ → 8人平分成兩堆分別為4人、4人

(3) 一個 8cycle



$$\frac{7!}{2} = 2520\ (\text{種})$$

$\frac{7!}{2}$ → 8人排項圈

綜合(1)、(2)、(3)，共 $672 + 315 + 2520 = 3507$ (種)

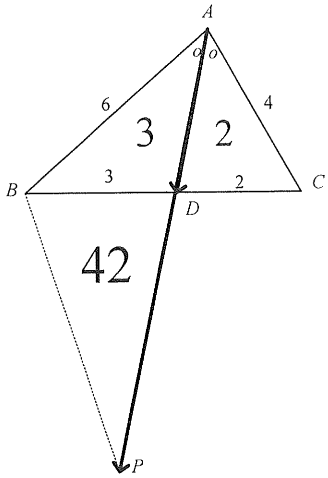
9. 填充

解：

(1) $\overline{BA}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=3:2$ ⇨ $\Delta ABD:\Delta ACD=3:2$ **(同高)**

(2) 令 $\Delta ABD=3$ 、$\Delta ACD=2$ ⇨ $\Delta ABC=5$ ⇨ $\Delta ABP=45$ ⇨ $\Delta BDP=42$

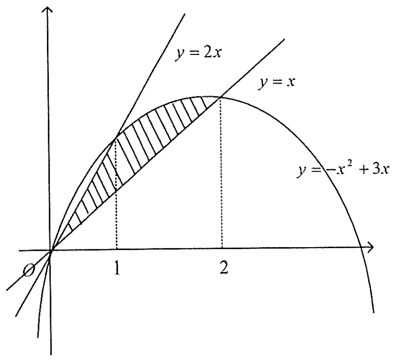
(3) $\vec{AD}=\frac{2}{5}\vec{AB}+\frac{3}{5}\vec{AC}$ ⇨ $\vec{AP}=15\vec{AD}=6\vec{AB}+9\vec{AC}$ ###



1. 計算

解：

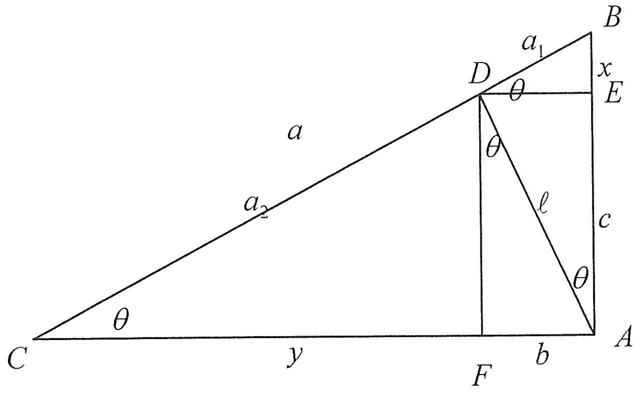
(1) $\int_0^1(2x-x)dx+\int_1^2(-x^2+3x-x)dx=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$ ###



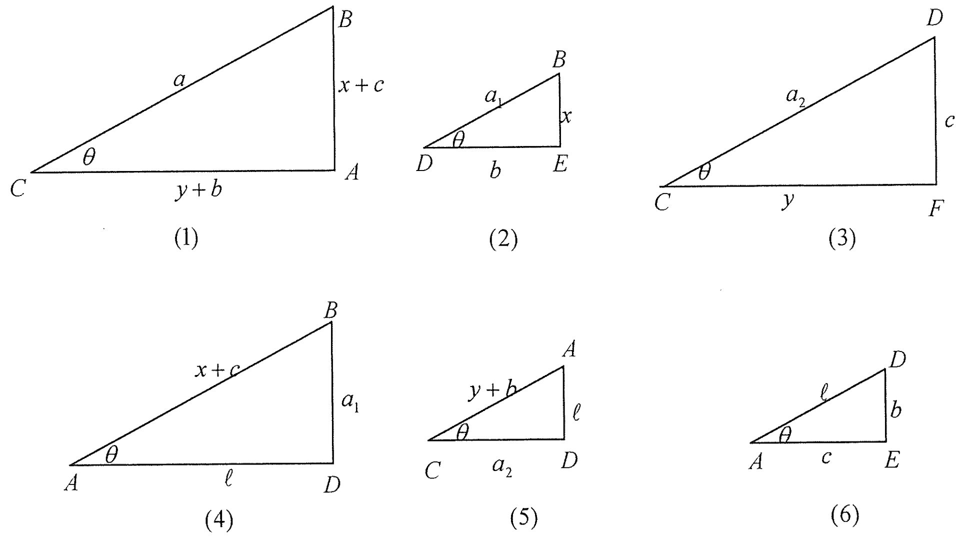
2. 計算

解：

(*) 令 $\overline{BD}=a_1$ 、$\overline{CD}=a_2$ 、$\overline{AF}=b$ 、$\overline{AE}=c$ 、$\overline{AD}=\ell$



圖上的相似圖如下：



(1*) 由(1)(3)(5)得： $\dfrac{a}{y+b}=\dfrac{a_2}{y}=\dfrac{y+b}{a_2}$ ⇨ $\begin{matrix} aa_2=(y+b)^2 \\ {a_2}^2=y(y+b) \end{matrix}$ ⇨ $a^2y=(y+b)^3$

⇨ $(y+b)=(a^2y)^{\frac{1}{3}}$

(2*) 同理,由(1)(2)(4)得： $\dfrac{a}{x+c}=\dfrac{a_1}{x}=\dfrac{x+c}{a_1}$ ⇨ $\begin{matrix} aa_1=(x+c)^2 \\ {a_1}^2=x(x+c) \end{matrix}$ ⇨ $a^2x=(x+c)^3$

⇨ $(x+c)=(a^2x)^{\frac{1}{3}}$

(3*) 由 ΔABC **得：** $(x+c)^2+(y+b)^2=a^2$ ⇨ $(a^2x)^{\frac{2}{3}}+(a^2y)^{\frac{2}{3}}=a^2$

⇨ $a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}=a^2$ ⇨ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ###

3. 計算

解：

(*) 證明：$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\in N$

(1) 當$n=1$時，$\frac{1^5}{5}+\frac{1^4}{2}+\frac{1^3}{3}-\frac{1}{30}=1\in N$，成立。

(2) 設$n=k$時，$\frac{k^5}{5}+\frac{k^4}{2}+\frac{k^3}{3}-\frac{k}{30}\in N$，成立，

則當$n=k+1$時，

$$\frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+1)^4}{2}+\frac{(k+1)^3}{3}-\frac{(k+1)}{30}$$

$$=\frac{k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1}{5}+\frac{k^4+4k^3+6k^2+4k+1}{2}+\frac{k^3+3k^2+3k+1}{3}-\frac{k+1}{30}$$

$$=(\frac{k^5}{5}+k^4+2k^3+2k^2+k+\frac{1}{5})+(\frac{k^4}{2}+2k^3+3k^2+2k+\frac{1}{2})+(\frac{k^3}{3}+k^2+k+\frac{1}{3})-(\frac{k}{30}+\frac{1}{30})$$

$$=(\frac{k^5}{5}+\frac{k^4}{2}+\frac{k^3}{3}-\frac{k}{30})+(k^4+2k^3+2k^2+k)+(2k^3+3k^2+2k)+(k^2+k)+(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30})$$

$=N_1+N_2+N_3+N_4+1\in N$ ，亦成立。

故得證 $\forall n\in N$，$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\in N$ ###