107-全國高中教師聯招（補正）

3. 計算

解：

(*) 令 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$，$b_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$

(PART A：)

(1) $a_n=(1+\frac{1}{n})^n=C_0^n(\frac{1}{n})^0+C_1^n(\frac{1}{n})^1+C_2^n(\frac{1}{n})^2+\ldots+C_k^n(\frac{1}{n})^k+\ldots+C_n^n(\frac{1}{n})^n$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1)(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\ldots+\frac{1}{n!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$a_{n+1}=C_0^{n+1}(\frac{1}{n+1})^0+C_1^{n+1}(\frac{1}{n+1})^1+C_2^{n+1}(\frac{1}{n+1})^2+\ldots+C_k^{n+1}(\frac{1}{n+1})^k+\ldots+C_{n+1}^{n+1}(\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1)(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1)(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\ldots+\frac{1}{n!}(1)(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{n-1}{n+1})+C_{n+1}^{n+n}(\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

$\because (1-\frac{1}{n})<(1-\frac{1}{n+1})$ ⇨ $a_n\le a_{n+1}$ （目的：證明 $\{a_n\}$ 為增數列）

(2) $a_n=1+1+\frac{1}{2!}(1)(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\ldots+\frac{1}{n!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}(=b_n)\quad<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}+\ldots+\frac{1}{2\times 2\times\ldots\times 2\times 2}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots=3$$

⇨ $a_n\le b_n$ （目的：證明 $\forall n\in Z^+$，$a_n\le b_n$；且 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 皆有上界）

(3) $\because \{a_n\}$、$\{b_n\}$ 皆為增數列，且有上界

⇨ $\lim_{n\to\infty}a_n$、$\lim_{n\to\infty}b_n$ 皆存在（依：另一個定理）

(PART B：)

(*) 令 $\lim_{n\to\infty} a_n = e$

(1) $\forall k \in Z^+$，$a_k \le b_k$

(2) $\exists k \in Z^+$，$\forall n > k$

$$a_n = C_0^n(\frac{1}{n})^0 + C_1^n(\frac{1}{n})^1 + C_2^n(\frac{1}{n})^2 + \ldots + C_k^n(\frac{1}{n})^k + \ldots + C_n^n(\frac{1}{n})^n$$

$$\ge C_0^n(\frac{1}{n})^0 + C_1^n(\frac{1}{n})^1 + C_2^n(\frac{1}{n})^2 + \ldots + C_k^n(\frac{1}{n})^k$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1)(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \ldots + \frac{1}{k!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{n\to\infty}[1 + 1 + \frac{1}{2!}(1)(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \ldots + \frac{1}{k!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})]$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \ge b_k$$

（目的：因為 a_n 展開式的無限項 $\ge a_n$ 展開式中的有限項；而有限項的極限 $= b_k$）

(3) 由(1)(2)，得 $\lim_{n\to\infty} a_n \ge b_k \ge a_k$ ⇨ $\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{k\to\infty} b_k \ge \lim_{k\to\infty} a_k$ ⇨ $e \ge \lim_{k\to\infty} b_k \ge e$

⇨ $\lim_{k\to\infty} b_k = e$ ⇨ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ ###

參考資料：

例 1. 4.18. 令

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n\ ,\ b_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\ ,$$

試證明 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都有極限，而且

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n\ 。$$

此極限值以 e 表示，就是自然對數的底，

$$e=2.718281828459045\cdots\cdots\ 。$$

【證明】 由二項式定理

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots2\cdot1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

若把 n 換成 $(n+1)$，則因 $\forall j\in Z^+$ ，

$$1-\frac{j}{n}\leq 1-\frac{j}{n+1}\ ,$$

而且 a_{n+1} 之展開式中多了一項 $\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots\cdots(1-\frac{n}{n+1})$ ，

因此 $\forall n\in Z^+$ ，$a_n\leq a_{n+1}$ ，

其次

$$a_n\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+2(1-\frac{1}{2^n})<3$$

所以 $\{a_n\}$ 是一有界增數列，故有極限（定理 1. 4.11.）。令其極限值爲 e 。

任意給定 $k\in Z^+$ ，$\forall n>k$ ，

$$a_n>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

由定理 1. 4.14.

$$e=\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\geq\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots\cdots(1-\frac{k-1}{n})]$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}=b_k\ 。$$

故得：$\forall k\in Z^+$ ，

$$e\geq b_k\geq a_k$$

所以由定理 1. 4.15.，知 $\lim_{n\to\infty} b_n=e$ 。 ▩

現在討論一個非常重要的數列的極限存在問題。這個數列就是：

$$y_1=(1+1)^1,\ y_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ y_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,$$

例

$$\cdots,\ y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \cdots$$

應用二項式展開，可得

$$y_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$y_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$\underbrace{+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{\text{多}}$$

但

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$y_{n+1}-y_n>0$

①單調增加
②有界
③極限

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)<\left(1-\frac{2}{n+1}\right) < 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) < 1$$

所以 y_n 中的每一項都小於 y_{n+1} 中相應的項，而 y_{n+1} 中還多出最後的一項且這項顯然大於零，因此 $y_n < y_{n+1}$。故 $\{y_n\}$ 是單調增加數列。現在來證明 $\{y_n\}$ 的有界性。因 y_n 的展開式的每一項括號內的因子都是小於 1 的，所以有

$$\begin{aligned}0<y_n&<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=1+1+1-\frac{1}{n}<3\end{aligned}$$

即 $\{y_n\}$ 為有界數列。根據定理 3，則

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

存在。通常我們記這極限為 e，它就是自然對數的底。

$e \approx 2.71828$，關於 e 的近似計算，我們在這裏不敍述了，而把它留到以後再去進行。