教育部受託辦理 100 學年度國立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

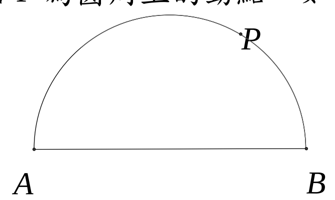
請注意：本試題共兩部分，選擇題 10 題及綜合題 10 題，共計 100 分。**選擇題請用 2B 軟心鉛筆在<u>答案卡</u>劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在<u>答案卷</u>上作答**。<u>本科不可以使用電子計算器。</u>

第一部分：選擇題（每題 4分，共 40 分）

(D) 1. 試求 $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})....(1-\frac{1}{100^2})$ 的值為(A) $\frac{99}{100}$ (B) $\frac{99}{200}$ (C) $\frac{199}{200}$ (D) $\frac{101}{200}$ 。

(C) 2. 試求 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos 3x}=$(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{-1}{9}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{-2}{9}$ 。

(B) 3. 有一個以 $\overline{AB}=2$ 為直徑的半圓，若 P 為圓周上的動點，如圖所示，試求 $3\overline{AP}+4\overline{BP}$ 的最大值為(A)5 (B)10 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $10\sqrt{2}$ 。



(C) 4. 已知某三角形的二高分別為4與12，若第三高之長為h，則 (A)$2<h<5$ (B)$3<h<5$ (C)$3<h<6$ (D)$4<h<8$。

(B) 5. 已知袋中有3個黑球，4個白球，今自袋中隨機取球，每次取出一球，取出後不放回，而在有一種色球被取完時就停止，則全部恰取5球的機率為 (A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{2}{35}$ (D) $\frac{4}{35}$ 。

(D) 6. 設x，y為實數，且滿足 $x^2+xy+y^2=6$，若 x^2+y^2 的最大值為M，最小值為m，試求$M+m$=(A)10 (B)12 (C)14 (D)16 。

(D) 7. 若 $n=1+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+50\cdot 50!$ 則 n 除以 50 的餘數為 (A)13 (B)23 (C)29 (D)49 。

(A) 8. 若 $y=f(x)$ 為定義在 R 上的函數，圖形對稱於 $(-\frac{3}{4},0)$，若對任意實數 x，恆有 $f(x)=-f(x+\frac{3}{2})$ 且 $f(-1)=1$，$f(0)=-2$，則 $\sum\limits_{k=1}^{2011} f(k)=$(A)1 (B)-1 (C)2 (D) -2 。

(A) 9. 已知 ΔABC 中，$\angle C$ 為直角，$\overline{BC}$ 上有一點 D，使得 $\angle CAD=2\angle DAB$，若 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{4}{5}$，則 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=$(A) $\frac{27}{25}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{19}{17}$ (D) $\frac{2}{3}$ 。

(B) 10. 若 $\omega=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$ 其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $|\omega+2\omega^2+3\omega^3+\cdots+9\omega^9|^{-1}=$(A) $\frac{1}{9}\sin 40^\circ$ (B) $\frac{2}{9}\sin 20^\circ$ (C) $\frac{1}{9}\cos 40^\circ$ (D) $\frac{1}{18}\cos 20^\circ$ 。

第二部分：綜合題（每題 6 分，共 60 分）

1. $x^{20}+1$ 除以 $(x^2+1)(x^4-4)$ 的餘式為 <u>$341x^4-339$</u>。
2. 化簡 $\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$ 的值為 <u>$\frac{-1}{2}$</u> 。
3. 設 $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$，試求 $f(x^6)$ 除以 $f(x)$ 所得的餘式為 <u>6</u>。
4. 設 $f(x)=x^3+2x^2-3x-1$，$g(x)=x^4+3x^3-x^2-5x+2$，且 α,β,γ 為 $f(x)=0$ 之三根。試求 $g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma)$ 之值＝<u>35</u>。
5. 設 $f(x)=x+1+\int_0^2 g(x)dx$，$g(x)=2x-3+\int_0^1 f(x)dx$，試求 $g(x)$除以$(4x-1)$之餘式為<u>-2</u>。
6. 正方形 $ABCD$ 的邊長為 5，E 為 $\overline{BC}$ 上的點使得 $\overline{BE}=3$，$\overline{EC}=2$。若 P 是對角線 $\overline{BD}$ 上的點，當 $\overline{PE}+\overline{PC}$ 有最小值時，

此時 $\overline{PB}=\frac{15}{8}\sqrt{2}$ 。

7. α,β 為兩複數，滿足 $\beta^2-2\alpha\beta+4\alpha^2=0$ ，且 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$ ，若 α,β 在複數平面上所代表的點為 A,B，而 O 是複數平面的原點，則 ΔOAB 的面積為 $2\sqrt{3}$ 。

8. 若 $\frac{3}{4}\le x\le 2$ 且 $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{4x-3}$，則當 $x=$? 時 $f(x)$ 有最大值為多少?

9. 設 x，y 為實數且 a，b 為正數，若滿足 $\begin{cases}(x^2+y^2+9)(a^2+b^2+4)=(ax-by+6)^2\\ \frac{2a}{3b^2}+\frac{b}{2}+\frac{3b}{a}=3\end{cases}$ ，試求 $x+y+a+b=$？

10. 試證：半徑為 r 的球體的體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 。