

國立新竹高級中學 110 學年度第一學期第 1 次教師甄選初試試題

(記憶版)

一、填充題 (每題 5 分)

1. 將 12 個字母  $A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e, f$  兩兩配成 6 對，大小寫需同義。例如： $Aa$  可以、 $AB$  不行、 $Ab$  不行。試求至少兩對同義的方法數。
2. 西瓜田裡有 5 顆大小不同的西瓜排成一列。某人到西瓜田採摘一顆西瓜，採西瓜的方法為前 2 顆必不取，之後如果看到比前面大顆的西瓜就拿。試求某人採摘到最大成熟西瓜的機率。
3. 數列  $\langle a_n \rangle$  的前  $n$  項和  $S_n = 2a_n - 1, n \in \mathbb{N}$ 。數列  $\langle b_n \rangle$  滿足  $b_1 = 3, b_{n+1} = a_n + b_n, n \in \mathbb{N}$ 。試求數列  $\langle b_n \rangle$  的前  $n$  項和。(以  $n$  表示)
4. 已知  $0^\circ \leq x^\circ < 360^\circ$  且  $\sin 20^\circ = \sqrt{3} \cos 40^\circ + \sin x^\circ$ ，則  $x$  之值為何？
5. 設  $\vec{OA} = (3, 3, 1), \vec{OB} = (4, 2, 0), \vec{OC} = (3, -6, -9)$ ，若  $H$  為異於原點  $O$  的點，且  $\vec{OA}$  在  $\vec{OH}$  上的正射影為  $\vec{OH}$ ， $\vec{OB}$  在  $\vec{OH}$  上的正射影為  $2\vec{OH}$ ， $\vec{OC}$  在  $\vec{OH}$  上的正射影為  $3\vec{OH}$ ，試求  $|\vec{OH}|$  之值。
6. 設  $A(-2, 0), B(-1, 4)$ ，若點  $P$  在  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$  上，試求  $\overline{PA} + \overline{PB}$  的最小值。
7. 設  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心，若  $\vec{AO} = \vec{AB} + 2\vec{AC}$ ，則  $\sin \angle BAC = ?$
8. 若實係數多項式方程式  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  的三根和為  $-2$ ，且各根的絕對值都是 1，試求數組  $(a, b, c)$ 。
9. 若  $z$  為一複數，且  $\text{Arg}\left(\frac{z+k}{z}\right) = \frac{\pi}{6}, \text{Arg}\left(\frac{z+2k}{z+k}\right) = \frac{\pi}{4}, k > 0$ ，則  $\frac{k}{z} = ?$
10. 數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}, n \in \mathbb{N}$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

二、計算題（每題 10 分）

1. 若  $g(n)$  表示正整數  $n$  的奇因數中最大者，例如： $g(3)=3$ ， $g(14)=7$ 。

$$\text{求 } \sum_{k=1}^{2^n} g(k) = g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(2^n) = ?$$

2. 已知四面體  $ABCD$  中， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{AC}=7$ ， $\overline{DA}=9$ ， $\overline{DB}=\overline{DC}=8$ ，試求四面體  $ABCD$  的體積。

3. 已知拋物線  $y^2=4x$ ，有兩直線  $L_1$  和  $L_2$  通過拋物線的焦點且互相垂直，若  $L_1$  與拋物線交於點  $A$  和點  $B$ ， $L_2$  與拋物線交於點  $C$  和點  $D$ ，試求  $\overline{AB}+\overline{CD}$  的最小值。

4. 設  $z$  是不為零的複數，且  $z+\frac{1}{z}$  為實數。若  $n$  為整數，證明： $z^n+\frac{1}{z^n}$  為實數。

5. 已知直線  $y=mx$  與  $f(x)=x^3-5x+2$  恰交於 2 點。

(1) 求  $m$  之值。(6 分)

(2) 求兩曲線所圍的區域面積。(4 分)