

國立臺南女子高級中學九十六學年度第一次教師甄選試題

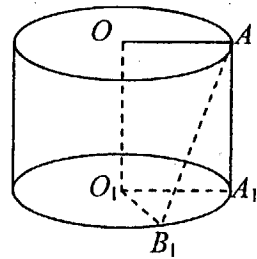
說明：

1. 本試題共包含兩部份，第一部分為填充題，共 16 題，每題 5 分，不需書寫作答過程，請老師依題號順序作答。第二部分為計算題，共 2 題，每題 10 分。
2. 作答時請註明清楚題號。

一、填充題

1. 已知 $(\log 9x^2)(\log a\sqrt{x}) + \log \frac{1}{x} = \log 4x + 5$ 之二根積為 $\frac{3}{4}$ ，求 $a =$ _____。
2. 已知 $\triangle ABC$ ， $\overline{AB} = 5$ ，其外接圓半徑為 10，試求 $\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} =$ _____。
3. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(x^{1/n}-1)}{(1-x)^n} =$ _____。
4. 設 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $14x-25$ ，除以 $(x-3)(x-4)(x-5)$ 的餘式為 x^2+x-1 ，除以 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ 的餘式為 $r(x)$ ，則 $r(6) =$ _____。
5. 已知一橢圓之兩焦點為 $(3,0)$ 、 $(0,a)$ ，而 $2x+y=16$ 、 $2x+y=1$ 為此二橢圓的兩切線，則此橢圓的長軸長為 _____。
6. 若 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$ 的平均數為 0，母體標準差為 2；
若 $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{100}$ 的平均數為 0，母體標準差為 5，
則當 $\sum_{k=1}^{100} X_k Y_k$ 為最大時， $\log \left| \frac{X_1 X_2 X_3 \cdots X_{100}}{Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_{100}} \right|$ 的首數為 _____。
7. 箱子中有大小相同，紅、黃、藍三種顏色的球共 200 個，若一次取兩球，則取到紅球個數的期望值是 0.6 球。若一次取五球，則取到黃球個數的期望值是 1.2 球。則箱子中共有 _____ 個藍色球。
8. 已知一個數列的各項為 1 或 2，首項為 1，且在第 k 個和第 $k+1$ 個 1 之間有 2^{k-1} 個 2，即 $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, \dots$ ，求此數列前 2007 項之和為 _____。

9. 如右圖所示，圓柱的高 $OO_1=8$ ，底面半徑 $O_1A_1=OA=6$ ， $AB_1=10$ ，則 AB_1 與 OO_1 的距離為_____。



10. 三球面 S_1 、 S_2 、 S_3 兩兩外切，半徑分別為 4、9、16，已知相異二平面 E_1 、 E_2 皆為三球面之公切面，設兩平面 E_1 、 E_2 之銳夾角為 θ ，則 $\cos\theta$ 之值為_____。

11. 有一點光源從拋物線 $y=2x^2$ 上的點 P 發射一條雷射光，射向焦點 F ，經對稱軸反射後，經過拋物線上的另一點 Q ，設 $\overline{PF}=a$ ， $\overline{QF}=b$ ，則 $4a+b$ 的最小值為_____。

12. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$)，設 $A_n = \left(\frac{5}{4} - \frac{\omega^2+1}{2\omega}\right) \left(\frac{5}{4} - \frac{\omega^4+1}{2\omega^2}\right) \left(\frac{5}{4} - \frac{\omega^6+1}{2\omega^3}\right) \cdots \left(\frac{5}{4} - \frac{\omega^{2n-2}+1}{2\omega^{n-1}}\right)$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n =$ _____。

13. 切圓 $C: x^2+y^2=20$ 於點 $A(2, 4)$ 及點 $B(-4, 2)$ 的拋物線之頂點坐標為_____。

14. 甲、乙、丙...等八人排成一列，規定甲、乙、丙三人不與丁、戊二人相鄰，則有_____種排法。

15. 甲袋中有二紅球一黑球、乙袋中有二紅球，每次自甲袋取一球放入乙袋，再從乙袋取一球放回甲袋，經取放 n 次後，黑球在甲袋之機率為 P_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n =$ _____。

16. 設 $f(x) = 3\cos \frac{x}{3} - 2\sin \frac{x}{2} - 6\sin \frac{x}{6}$ ，則 $f(x)$ 之最小值為_____。

二、計算題

1. 已知直線 L 與曲線 $\Gamma: y=(x-2)^3(x-6)+2$ 相切於相異的 A 、 B 兩點，求直線 L 方程式。

2. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，求 $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{32}{\sqrt{\cos x}}$ 的最小值。