

【數學科】初試試題

計算題：共十題，每題十分，作答時請按題號順序作答，並清楚標明題號。

$$1. 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

2. 給定一個橢圓  $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  及內部一點  $M(2, 1)$ ，試求：

- (1) 以  $M$  為中點之弦  $\overline{AB}$  的斜率。
- (2) 直線  $AB$  的方程式及弦  $\overline{AB}$  的長度。

3. 考慮由不等式  $x+2 \geq y \geq \frac{1}{4}x^2 + x + 1$  所決定的圖形  $A$ 。若直線  $y = ax + 1$  ( $a < 0$ ) 將  $A$  的面積分成  $1:2$ ，則  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設  $ABCD$  是邊長為 1 的正方形， $P$  點在  $\overline{BC}$  上， $Q$  點在  $\overline{CD}$  上，且  $\angle PAQ = 45^\circ$ ，試證  $\frac{\overline{AB} + \overline{BP}}{\overline{AD} + \overline{DQ}} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AQ}^2}$

$$5. \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \sqrt[n]{1^n + 2^n} + \sqrt[n]{2^n + 3^n} + \dots + \sqrt[n]{(m-1)^n + m^n}}{m^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$6. \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

7. 菱形  $ABCD$  內接於  $y = x$  與  $y = x^2$  所圍區域， $C, D$  在  $y = x$  上， $\overline{AD}, \overline{BC}$  為鉛直線。若  $A$  之坐標為  $(x_0, y_0)$ ，則  $x_0 + y_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 已知直角三角形斜邊上的高  $h$  為定數，設  $s$  為此直角三角形周長的一半，求  $s$  的極小值，並求此時的兩股長及斜邊。

9. 若圓內接四邊形  $ABCD$  的四個邊長分別為  $a, b, c, d$ ，設  $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ ，試證明圓內接四邊形  $ABCD$  的面積  $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 。

10. 設  $a, b, c$  均為實數，試推導出  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  的解。