58/100 60mins.

臺中市立文華高級中等學校 107 學年度第 1 次教師甄選
數學科專業知能試題本(填充題公告)

測驗說明：

一、本測驗分成二大題：填充題(75 分)及計算證明題(25 分)。

二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。

三、計算證明題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。

四、另附五張 A4 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、填充題(每題 5 分，共 75 分，全對才給分。)

1. 在實數數列 $<a_n>$ 中，已知 $a_1=1$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$。若 $a_n=\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}\ (n\geq 2)$，則 a_{107} 之值為_______。

2. 設 $f(x)=x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+a_7x^7+\cdots+a_1x+a_0$ 為實係數多項式。若 $f(x)=0$ 的所有根都是 $x^2-x+3=0$ 的根，則 $a_7=$_______。

3. 有相同的 3 面白旗、2 面黑旗、2 面紅旗，共 7 面旗子全部掛在 A、B、C 三根旗桿上，每根旗桿可掛旗數不限，也可以不掛。若需考慮掛上旗桿的排列順序，則共有_______種不同的掛法。

4. 設 ΔABC 的三邊長為 a，b，c，且 a，b，c 為方程式 $x^3-3\sqrt{6}x^2+17x-5\sqrt{6}=0$ 的三根，則 ΔABC 的面積為_______。

5. 設 D 為 ΔABC 的 $\overline{BC}$ 上之一點，且 $\overline{BD}=\overline{AC}=1$，若 $\angle BAD=30^\circ$，$\angle CAD=90^\circ$，則 $\overline{CD}$ 之長為_______。

6. $\overrightarrow{OP}=(x-2y,2x-y,3x+2y)$，其中 $1\leq x\leq 2$，$-1\leq y\leq 1$，則所有 P 點所形成的圖形面積為_______。

7. 已知空間中平面 $E: 2x-y+2z+9=0$ 及兩定點 $A(3,4,1)$、$B(1,-2,5)$，若動點 P 在平面 E 上移動，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值為________。

8. 已知橢圓 $\Gamma: 25x^2+4y^2=100$ 之一弦 $\overline{AB}$ 的中點為 $(1,-4)$，則直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式為________。

9. 已知函數 $f(x)=x^3+x^2+x$，若 $g(x)$ 為 $f(x)$ 的反函數(即 $f^{-1}(x)=g(x)$)，則函數 $y=f(x)$ 的圖形與函數 $y=g(x)$ 的圖形所圍成的區域面積為________。

10. 設 z_1,z_2,z_3 為複數，$i=\sqrt{-1}$，$k\in R$，$\omega=-\sqrt{3}+i$，已知 $z_1=(2\cos\theta+3)+i(2\sin\theta+5)$，$0\le\theta<2\pi$，$|z_2-z_1|=1$，$z_3=k\omega+2$，則 $|z_2-z_3|$ 之最小值為________。

11. 空間中三向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，若 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & \alpha & 10 \\ \alpha & 9 & \beta \\ 10 & \beta & 25 \end{bmatrix}$，且 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 三向量所展開的平行六面體體積為 $20\sqrt{3}$，則內積 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{b}$ 之最大值為________。

12. 投擲一公正骰子，若連續兩次擲出相同的點數或投擲滿 n 次則停止投擲(n 為正整數，$n\ge 2$)，令 E_n 表示投擲次數的期望值，則 $E_n=$________。

13. 設 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3-2n$，則
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{3n}}-\sqrt[3]{a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}}}{n}=$$________。

14. 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{(3n+k)(n-k)}}{n^2}=$________。

15. $f^{(n)}(x)$ 表示函數 $f(x)$ 微分 n 次。已知 $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$，則 $f^{(7)}(0)=$________。

二、 計算題(共 3 題，計 25 分)

1. 用五種顏色塗下列格子，每個格子只能塗一色且相鄰不同色，若 A 和 G 不同色，則共有多少種塗法？

A	B	C	D	E	F	G

2. 若 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 在實數域上是連續函數，則數對 (a,b) 的值為何？.

3. 曲線 $\Gamma:(x+3)(y-2)=-3$，點 $P(x_0,y_0)$ 為曲線上之動點，若 L 為過點 P 與曲線相切的直線，證明直線 L 和 $x=-3$ 及 $y=2$ 所圍成的三角形面積為定值。

107 文華高中 58/100 60 mins. 計算 8分, 7分, 10分 計算

一、填充

1. $a_n(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})=a_n$

$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=1$

$\Rightarrow \sqrt{S_{107}}-\cancel{\sqrt{S_{106}}}=1$

$\cancel{\sqrt{S_{106}}}-\sqrt{S_{105}}=1$

$\vdots$

$+\ \cancel{\sqrt{S_2}}-\sqrt{a_1}=1$

$\sqrt{S_{107}}-1=106 \Rightarrow S_{107}=107^2$,

推得 $S_{106}=106^2$

$\Rightarrow S_{107}-S_{106}=a_{107}=107^2-106^2=213$ #

2. $f(x)=(x^2-x+3)^5=[x^2+(3-x)]^5=C^5_a(x^2)^a(3-x)^{5-a}$

若 $a=3$，$(3-x)^2$ 出 x

$\Rightarrow C^5_3\cdot(-6)=-60$

$a=2$，$(3-x)^3$ 出 x^3

$\Rightarrow C^5_2\cdot(-1)=-10$

$a=1$，$(3-x)^4$ 出 x^5 → 不合

故所求 a_7 (x^7係數) $=-10+(-60)=-70$ #

3. $H^3_7\times\frac{7!}{3!2!2!}=36\times210=7560$ #

↓ 3根旗桿相同

掛上旗桿順序

4. $a+b+c=3\sqrt6$，$s=\frac32\sqrt6$

$\triangle$面積 $=\sqrt{\frac32\sqrt6(s-a)(s-b)(s-c)}$

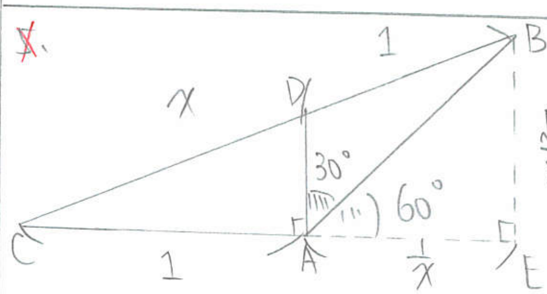
$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-3\sqrt6x^2+17x-5\sqrt6$

$(s-a)(s-b)(s-c)=(\frac32\sqrt6)^3-3\sqrt6\cdot(\frac32\sqrt6)^2+17\cdot(\frac32\sqrt6)-5\sqrt6$

$=\frac{\sqrt6}{4}$

所求 $=\sqrt{\frac{3\times6}{8}}=\frac{\sqrt9}{\sqrt4}=\frac32$ #

~~5.~~



延長$\overline{CA}$
B作垂線交CA於E

$x:1=1:\overline{AE}$，$\overline{AE}=\frac1x \Rightarrow \overline{BE}=\frac{\sqrt3}{x}$

$\overline{BC}^2=\overline{CE}^2+\overline{BE}^2 \Rightarrow (1+x)^2=(1+\frac1x)^2+(\frac{\sqrt3}{x})^2$

$\Rightarrow x^2+2x+1=1+\frac{1}{x^2}+\frac2x+\frac{3}{x^2}$

$\Rightarrow x^4+2x^3-2x-4=0$

分解得 $(x+2)(x^3-2)=0$，$x=-2$ (不合) 或 $\sqrt[3]{2}$ #

6. $\vec{OP}=(x,2x,3x)+(-2y,-y,2y)$

$=x\cdot(1,2,3)+y\cdot(-2,-1,2)$

$\vec a=(1,2,3)$，$\vec b=(-2,-1,2)$

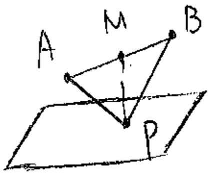
所圍 ▱ 面積 $=|\vec a\times\vec b|=\sqrt{122}$

因 $1\le x\le2$，$-1\le y\le1$

↳ $(1\times2)\times\sqrt{122}=2\sqrt{122}$ #

※ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ → 想中線定理

$2\cdot3-4+2\cdot1+9>0$
$2\cdot1-1\cdot(-2)+2\cdot5+9>0$) 同側

示意圖:


$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$

M固定　　固定 → 希望 $\overline{PM}$ 最小 ⇒ P為M的投影點

$M(2,1,3)$ ⇒ 設 $P(2+2t,1-t,3+2t)\in E$
得 $P:(-2,3,-1)$

$\overline{PM}=\sqrt{16+4+16}=6$, $\overline{AM}^2=(\frac{1}{2}\overline{AB})^2=14$

所求 Min. $=2(36+14)=2\times50=100$ #

8. $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ y_1+y_2=-8\end{cases}$

想算 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

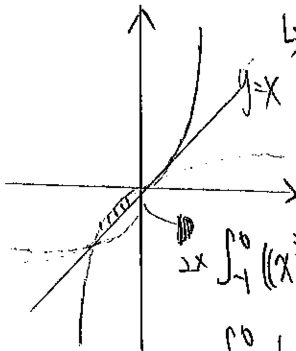
$A,B\in\Gamma$ → $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{25}=1\\ \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{25}=1\end{cases}$

$\frac{1}{4}\times2\times(x_2-x_1)+\frac{1}{25}\times(-8)\times(y_2-y_1)=0$

$\Rightarrow \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{25}{16}$

$\overleftrightarrow{AB}$: $y-(-4)=\frac{25}{16}(x-1)\Rightarrow 25x-16y-89=0$ #

9. $f(x)=x^3+x^2+x$ 和 $g(x)$ 對稱於 $y=x$



↳ $x(x^2+x+1)=0$　x只有1根 $x=0$

$f(x)=x\Rightarrow x^2(x+1)=0$
$x=0$或-1

$2\times\int_{-1}^{0}((x^3+x^2+x)-x)dx$

$=2\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx=2\times(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{0}$

$=2\times(0-(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}))=-2\times(\frac{3-4}{12})=\frac{1}{6}$ #

10. A點→z_1, B點→z_2, C點→z_3

$A\in(x-3)^2+(y-5)^2=4\Rightarrow$ 圓心$M(3,5)$ $r=2$

B為A所在圓的內外同心圓

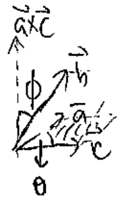
$z_3=-k\sqrt{3}+ki+2=(2-\sqrt{3}k)+ki\Rightarrow C(2-\sqrt{3}k,k)$

C點在 $L: x+\sqrt{3}y-2=0$　　B的同心圓

$d(M;L)=\frac{|3+5\sqrt{3}-2|}{\sqrt{1+3}}=\frac{5\sqrt{3}+1}{2}$, 所求 $\frac{5\sqrt{3}+1}{2}-2-1$

$=\frac{5\sqrt{3}-5}{2}$ #

11. 由矩陣乘法得知 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=10$
⇒以$\vec{a},\vec{c}$為底

示意


$\vec{a}\cdot\vec{c}=10\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2},\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

底▱面積 $=|\vec{a}||\vec{c}|\sin\theta=10\sqrt{3}$

$\Rightarrow|\vec{b}|\cos\phi=2$, $\cos\phi=\frac{2}{3}$

$(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{c}||\vec{b}|\cos(90^\circ-\phi)$ … Max.

$=\sqrt{61}\times3\times\frac{\sqrt{5}}{3}$

$=\sqrt{305}$ #

計算二：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

註：先檢查$|x|$ >1、<1 狀況

若 $|x|>1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}$

$|x|<1 \Rightarrow f(x)=ax^2+bx$

) 皆為連續函數，剩檢查 $x=1,-1$ $(|x|=1)$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=a+b \Rightarrow a+b=1$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=a-b$，$\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-1 \Rightarrow a-b=-1$

得 $(a,b)=(0,1)$ #

計算三：$\underbrace{xy}_{\text{product rule}}-2x+3y+3=0$ 微分拿切線斜率

$\Rightarrow y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}-2+3\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow (x+3)\dfrac{dy}{dx}=2-y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-y}{x+3}$

故 L 為 $y-y_0=\dfrac{2-y_0}{x_0+3}(x-x_0) \Rightarrow$ 和 $y=2$ 解聯立 $\Rightarrow 2-y_0=\dfrac{2-y_0}{x_0+3}(x-x_0) \Rightarrow x=2x_0+3$

和 $x=-3$ 〃〃〃 $\Rightarrow y-y_0=\dfrac{2-y_0}{x_0+3}(-3-x_0) \Rightarrow y=2y_0-2$

$\downarrow$

$y-y_0=y_0-2$

三點為 $(2x_0+3,2)$，$(-3,2y_0-2)$，$(-3,2)$

$$\triangle\text{面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-3 & 2x_0+3 & -3 & -3\\ 2 & 2 & 2y_0-2 & 2\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-6+4x_0y_0-4x_0+6y_0-6-6-4x_0-\cancel{6}+\cancel{6}+6y_0-6\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-24+4x_0y_0-8x_0+12y_0\right|$$

$$=\left|-12+2x_0y_0-4x_0+6y_0\right|$$

$$=\left|-12+6\right|=6\ (\text{定值})$$ #

註：$P(x_0,y_0)\in\Gamma$

$\Rightarrow x_0y_0-2x_0+3y_0-6=-3$

$x_0y_0-2x_0+3y_0=3$

$2x_0y_0-4x_0+6y_0=6$

12.

$$E_n = E_{n-1} + \underbrace{1\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}_{\substack{\text{皆無連續2次相同} \\ \text{才會有第}n\text{次}}}$$

$$+\ E_{n-1} = E_{n-2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$+\ E_3 = E_2 + \left(\frac{5}{6}\right)^{1}$$

$$E_n = E_2 + \left(\frac{5}{6} + \frac{5^2}{6} + \cdots + \frac{5}{6}^{n-2}\right)$$

$E_2 = 2$

必投2次且停止

$$\Rightarrow E_n = 2 + 5 - 5\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

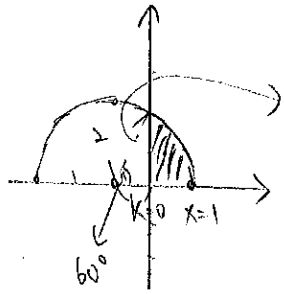
$$= 7 - \frac{5}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\times 6$$

$$= 7 - 6\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad \#$$

14. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\sqrt{\left(3+\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx \qquad y=\sqrt{3-2x-x^2}$$

$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4$ 上半圓部份



$$2^2\pi\times\frac{1}{6} - \frac{1\times\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \#$$

15. $$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$f^{(7)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{7!}{(1-x)^7} - \left(\frac{-7!}{(1+x)^7}\right)\right)$$

$$f^{(7)}(0) = 7! = 5040 \quad \#$$

13. $$a_n = \left[n^3 - 2n\right] - \left[(n-1)^3 - 2(n-1)\right] = 3n^2 - 3n - 1$$

$$a_{3n} = 3\cdot(3n)^2 - 3\cdot(3n) - 1 = 27n^2 - 9n - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = 27\sum_{k=1}^{n}k^2 - 9\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1$$

$$a_{2n} = 3\cdot(2n)^2 - 3\cdot(2n) - 1 = 12n^2 - 6n - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 12\sum_{k=1}^{n}k^2 - 6\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1$$

只需看 $\sqrt[3]{27\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} - \sqrt[3]{12\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

又只看 n^3 係數即可

$$\Rightarrow \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4} \quad \#$$

計算一：

$$a_n + a_{n-1} = 5\times 4^{n-1},\ n\ge 4$$

$$a_7 + a_6 = 5\times 4^6 \qquad \Rightarrow a_7 - a_3 = 5\times(4^6 - 4^5 + 4^4 - 4^3)$$

$$a_6 + a_5 = 5\times 4^5 \qquad = 5\times 3264$$

$$a_5 + a_4 = 5\times 4^4 \qquad = 16320$$

$$a_4 + a_3 = 5\times 4^3$$

$$a_3 = 5\times 4\times 3 = 60 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 16380 \quad \#$$

註：若為填充 $\Rightarrow (k-1)^n + (-1)^n\cdot(k-1)$

$$\Rightarrow 4^7 + (-1)^7\cdot 4$$

$$= 16384 - 4$$

$$= 16380 \quad \#$$