89/100　60 mins.

國立竹北高中 108 學年度第 1 學期第 2 次教師甄選______ 科試題卷

請考生自填：准考證號碼：____________　　　　姓名：__________

一、填充題

1.小穎的冰箱中有 5 顆士力架巧克力及 7 根加倍佳棒棒糖，今自 108 年 6 月 6 日起每天吃一個（巧克力或棒棒糖中的一個），直到冰箱內的巧克力及棒棒糖吃完為止．若這 5 顆巧克力及 7 根棒棒糖被吃到的機會均等，則在這種吃的過程中，冰箱內剩下巧克力數不多於冰箱內剩下棒棒糖個數的機率為____________．

2.若曲線 $y=x^3-9x^2+15x+7$，點 $P(0,a)$在曲線之外，$a\in\mathbb{R}$，若過 P 的切線可以有相異的三條時，求 a 的範圍為____________．

3.試求 $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)\cdot\frac{1}{5^{n-1}}$ ____________．

4.空間中，有一平面 E 過點 $P(2,3,1)$，且分別交 x 軸，y 軸，z 軸之正向於 A，B，C 三點，O 為原點，且 $k=2\overline{OA}+3\overline{OB}+4\overline{OC}$

(1)求 k 之最小值____________．

(2)k 有最小值時，平面 E 的方程式____________．

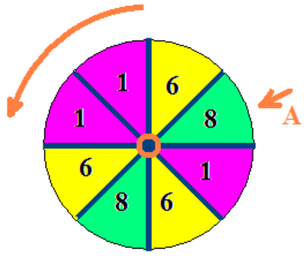
5.對於曲線 $f(x)=x^3$ 與 $x=0,x=1$ 及 x 軸所圍成區域，將閉區間 $[0,1]$ n 等分成 n 個區域，U_n,L_n 分別為上和、下和；若 $|U_n-L_n|<10^{-4}$，試求 n 的最小正整數____________．

6. 有一光源位於 $(-4,7)$，試求曲線 $y=\sqrt{x(4-x)}$ 落在 x 軸的投影長 ____________．

7.若水中有一半徑為 3 公分的球，其中浮出水面 1 公分，求此球在水面上的體積為

____________ 立方公分.

8.如圖，轉盤游戲．轉盤被分成 8 個均勻的扇形區域．游戲規則：用力旋轉轉盤，轉盤停止時箭頭 A 所指區域的數字就是游戲所得的點數(轉盤停留的位置是隨機的)．假设箭頭指到區域分界線的機率为 0.1，同時規定所得點數为 0．某同學進行了一次游戲，記所得點數為 ξ．求 ξ 的期望值____________．



9.已知 O 為原點， A,B 為橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上兩點，且 $\overline{OA}\perp\overline{OB}$ ，則 $\dfrac{1}{\overline{OA}^2}+\dfrac{1}{\overline{OB}^2}=$____________.

二、計算證明題

1.試就 a 值討論方程組 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 的解，並說明其幾何意義．

2.設一隨機試驗的樣本空間 S 只有兩個樣本點 a 及 a'，令事件 $A=\{a\}$，$A'=\{a'\}$，並設事件 A 發生的機率為 $p\,(0<p<1)$，不發生的機率為 $q\,(=1-p)$．今將此試驗重複 n 次，令 X 表示事件 A 發生的次數，試證：X 的期望值為 np．

3.已知一圓柱形玉米罐頭，底面的圓半徑為 r，表面積為 V，若不考慮罐頭厚度，欲獲得最大體積，試求此時罐頭高度與半徑的比值。

4. 已知數列 $\langle a_n\rangle$，滿足 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=2a_n+1\ ,(n\in N) \end{cases}$；

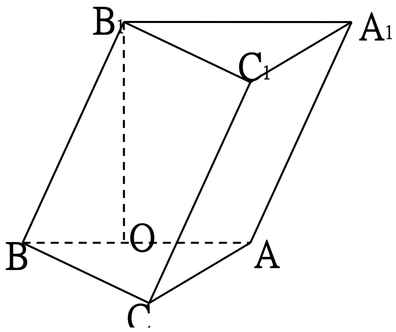
(1)求數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般式.

(2)若數列 $\langle b_n\rangle$ 滿足 $4^{b_1-1}\bullet 4^{b_2-1}\bullet 4^{b_3-1}\bullet\cdots\bullet 4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ ，試證數列 $\langle b_n\rangle$ 為等差數列.

5. 已知斜三稜柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各稜長均為 2，測稜 BB_1 與底面 ABC 所成角為 $\frac{\pi}{3}$，且側面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC.

（1）證明：點 B_1 在平面 ABC 上的投影點 O 为 AB 的中點.

（2）求點 C_1 到平面 CB_1A 的距離.



108 竹北高中 89/100 60mins. 填充一題5分，計算一題11分，算分.

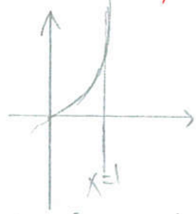
1. x：剩下巧克力數，y：剩下棒棒糖數

x ≤ y，$C^{12}_{7}-C^{12}_{8}=792-495=297$

全：$\frac{12!}{7!5!}=792 \Rightarrow p=\frac{297}{792}=\frac{3}{8}$ #

註：若為 y > x，$\underline{C^{11}_{6}-C^{11}_{7}}$

5. 示意圖



$U_n=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n}{n}\right)^3$

$L_n=\frac{1}{n}\times0^3+\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^3$

$|U_n-L_n|=\frac{1}{n}(1)^3-0=\frac{1}{n}<\frac{1}{10000}\Rightarrow n>10000$

故取10001 #

2. 設切點 $(b,f(b))$，切線斜 $=3b^2-18b+15$ $\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$

$y-(b^3-9b^2+15b+7)=(3b^2-18b+15)(x-b)$ 過 $P(0,a)$ 代入

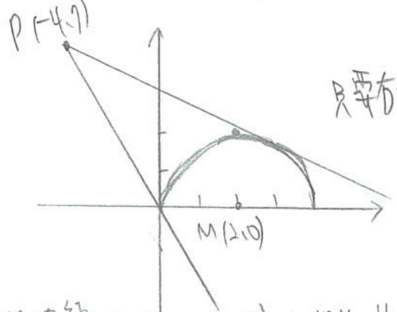
得 $2b^3-9b^2+(a-7)=0$ （let $g(b)$）

而 $g'(b)=6b^2-18b\overset{let}{=}0\Rightarrow b=0$ 或 3

$g(0)\times g(3)<0\Rightarrow(a-7)(a-34)<0\Rightarrow 7<a<34$ #

註：不能有等號 只有相異兩解

6. 曲線：$(x-2)^2+y^2=4$ 上半圓 $M(2,0)$, $r=2$



設切線 $y-7=m(x+4)\Rightarrow mx-y+(4m+7)=0\overset{let}{=}L$

$d(M,L)=2\Rightarrow 32m^2+84m+45=0$ 得 $m=-\frac{3}{4}$ or $-\frac{15}{8}$ (不合)

故切線 $-\frac{3}{4}x-y+(-3+7)=0$ $y=0$ 代入

$\frac{3}{4}x=4$，$x=4\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$

所求為 $\frac{16}{3}$ #

3. $S=\frac{2}{5^0}+\frac{5}{5^1}+\frac{8}{5^2}+\cdots$

$\frac{1}{5}S=\quad\frac{2}{5^1}+\frac{5}{5^2}+\cdots$

$\frac{4}{5}S=\frac{2}{5^0}+3\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)=2+3\times\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{11}{4}$

$S=\frac{11}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{55}{16}$ #

4. 設 E：$ax+by+cz=d$ $(d\neq0)$

過P $\Rightarrow 2a+3b+c=d$ 而 $\overline{OA}=\underset{>0}{\frac{d}{a}}$，$\overline{OB}=\underset{>0}{\frac{d}{b}}$，$\overline{OC}=\underset{>0}{\frac{d}{c}}$

a, b, c同號

(1) $k=\frac{2d}{a}+\frac{3d}{b}+\frac{4d}{c}$，$\frac{k}{d}=\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}$

$(2a+3b+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\right)\geq\left(\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{4}\right)^2\Rightarrow k\geq 49$

↓

min

(2) $\frac{2a}{2/a}=\frac{3b}{3/b}=\frac{c}{4/c}\Rightarrow a^2=b^2=\frac{1}{4}c^2$

$\Rightarrow a=b=\frac{1}{2}c\overset{let}{=}p$ $(p\neq0)$

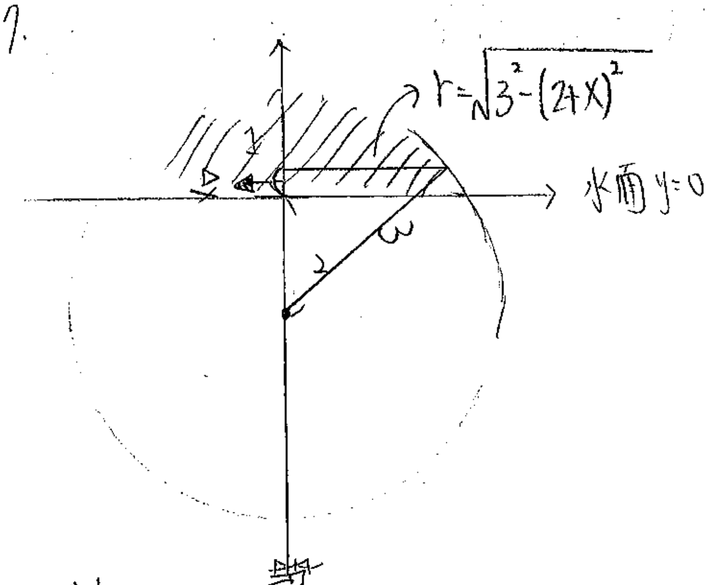
$d=2a+3b+c=2p+3p+2p=7p$

故 E：$ax+by+cz=d$

$\Rightarrow px+py+2pz=7p$

$\Rightarrow x+y+2z=7$ #

7.



所求為

$$\pi\int_0^1\left(\sqrt{3^2-(2+x)^2}\right)^2dx=\frac{8}{3}\pi \quad \#$$

8. 每一塊 $\frac{1-0.1}{8}=\frac{0.9}{8}$

而期望值 $=1\times\left(\frac{0.9}{8}\times3\right)+6\times\left(\frac{0.9}{8}\times3\right)+8\times\left(\frac{0.9}{8}\times2\right)$

$=\frac{33.3}{8}=\frac{333}{80}$ #

9. 時間內速解 找 $A(5,0)$ $B(0,4)$

$\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}=\frac{1}{25}+\frac{1}{16}=\frac{41}{400}$ #

$\boxed{\text{計算解}}$

設 $A(m,n)\Rightarrow B(nt,-mt)$ 長度伸縮

$$\begin{cases}\frac{m^2}{25}+\frac{n^2}{16}=1\\ \frac{n^2}{25}+\frac{m^2}{16}=\frac{1}{t^2}\end{cases}\Rightarrow m^2\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{16}\right)+n^2\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{16}\right)=1+\frac{1}{t^2}$$

$$\frac{1}{m^2+n^2}+\frac{1}{t^2(m^2+n^2)}=\frac{1}{m^2+n^2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\cancel{m^2+n^2}}\left[\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{16}\right)\left(\cancel{m^2+n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{41}{400} \quad \#$$

計算

1. $\det\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a-1)^2(a+2)$

當 $a=1$ 時，三平面重合

$a=-2$ 時，
$$\begin{aligned}-2x+y+z&=1\\x-2y+z&=1\\x+y-2z&=1\end{aligned}\quad\Rightarrow 3x-3y=0,\ \Rightarrow 3x-3y=3$$

無解 ⇒ 三平面兩兩交三直線
且三直線間平行.

$a\neq1,-2$ 時，恰有一解 ⇒ 三平面恰交於一點 #

2. $E(X)=\sum_{m=0}^{n}\underbrace{m\times C^n_m}_{=\frac{n!}{(n-m)(m-1)!}}\times p^m\times(1-p)^{n-m}$

配 $n-1$

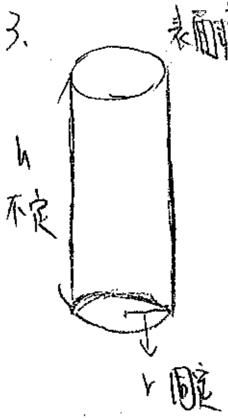
配 $n-1$，故 $p^m\to p^{m-1}$，外多乘 p

$=n\sum_{m=0}^{n}C^{n-1}_{m-1}p^m(1-p)^{n-m}$

$=np\underbrace{\sum_{m=0}^{n}C^{n-1}_{m-1}p^{m-1}(1-p)^{n-m}}=np\times1^{n-1}=np$ #

$C^{n-1}_0p^0(1-p)^{n-1}+\cdots+C^{n-1}_{n-1}p^{n-1}(1-p)^0=[p+(1-p)]^{n-1}$

3.



表面積 $V=r^2\pi\times2+2r\pi\times h=\pi(2r^2+2rh)$

而體積 $=r^2\pi\times h=\pi(r^2h)$

$$\frac{2r^2+rh+rh}{3}\geq\sqrt[3]{2r^4h^2}=\sqrt[3]{2}\times r^2h$$

等號成立時 $\Leftrightarrow 2r^2=rh=rh$

$\frac{h}{r}=2$ #

4.

(1) 不動点 $x=2x+1 \Rightarrow x=-1$

$a_{n+1}-(-1)=a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$

$\Rightarrow a_n+1=2^{n-1}(a_1+1)=2^n \Rightarrow a_n=2^n-1$ #

(2) $4^{(b_1+\cdots+b_n)-n}=(2^n)^{b_n}=4^{\frac{n}{2}\times b_n}$

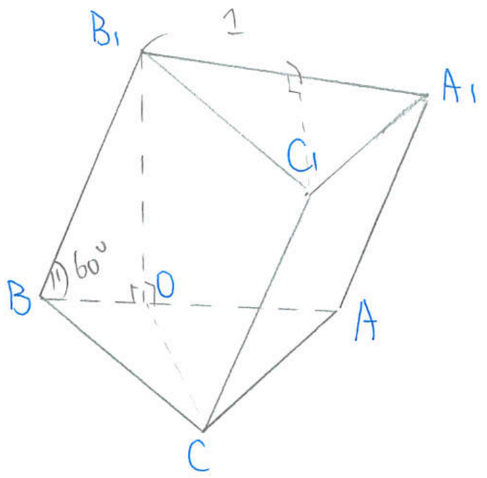
$\Rightarrow b_1+\cdots+b_n=n\left(1+\frac{b_n}{2}\right)=\frac{n}{2}(2+b_n)$

Goal: prove $b_1=2$

$n=1$ 代入 $\Rightarrow \underset{(2^2)^{b_1-1}}{\underset{\parallel}{4^{b_1-1}}}=(2^1)^{b_1} \Rightarrow 2b_1-2=b_1 \Rightarrow b_1=2$

得證 #

5.



(1) 因 $ABB_1A_1 \perp$ 底 $ABC \Rightarrow \overline{B_1O} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow$ 因 $\overline{BB_1}=2$, $\angle OBB_1=60^\circ \Rightarrow \overline{OB}=1$, $\overline{OB_1}=\sqrt{3}$

而 $\overline{AB}=2$, 故 O 為 $\overline{AB}$ 中点

得證 #

(2) 坐標化 $O(0,0,0)$, $B_1=(0,0,\sqrt{3})$

$\overline{OC}=$ 正$\triangle ABC$ 高 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3} \Rightarrow C(\sqrt{3},0,0)$

$A(0,1,0)$

$C_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$

$\overrightarrow{B_1A}=(0,1,-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{B_1C}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{B_1A}\times\overrightarrow{B_1C}=(-\sqrt{3},-3,-\sqrt{3}) \parallel (1,\sqrt{3},1)$

平面 CB_1A: $x+\sqrt{3}y+z=\sqrt{3}$

点 C_1 到 該 平面 距 $=\dfrac{|\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3+1}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ #