106 年新竹高中 90/100 60 mins.

一、填充題

1. $a^{\log_3 7}=27$, $b^{\log_7 11}=49$, $c^{\log_{11} 25}=\sqrt{11}$，求$a^{(\log_3 7)^2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11} 25)^2}$ 。

2. 求$(t-2)^2+(s-3)^2+(3t+5s-7)^2$的最小值。

3. 在小於等於10^n的正整數中任取一數，其各位數字至少出現一個 9 的機率為P_n，求$\lim\limits_{n\to\infty} P_n=$？

4. 實數$p,q,r\geq 0$，且$p+q+r=1$，已知$x=p+3q+4r$，$y=2p+q+3r$，求點(x,y)所圍成的圖形面積。

5. 全班 50 人，喜歡國文的有 30 人，喜歡英文的有 35 人，喜歡數學的有 40 人，試問三科皆喜歡的至少有多少人？

6. 求滿足如下條件的$(1,2,3,\ldots\ldots,12)$的排列$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{12})$的個數：
   $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$, $a_6<a_7<a_8<a_9<a_{10}<a_{11}<a_{12}$ 。

7. $\sum\limits_{0}^{100}(20k+17)\cdot C_k^{100}(0.3)^k(0.7)^{100-k}=$

8. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_{(3+h)^2}^{9}\dfrac{1}{1+x^4}\,dx=$

二、計算證明題

1. P 為邊長 2 的正四面體 O-ABC 表面上的點，求所有滿足∠APB≧90°的 P 點形成之面積。

2. 實係數多項式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx+c+1}{x^3-1}=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-k}{x^3-1}=0$，求$(a,b,c,k)$。

3. 試證：$log_{(n-1)}\, n>log_n(n+1)$, $n>2$, $n\in N$ 。

4. △ABC 中，$\overline{AB}=20$，M 為$\overline{AB}$中點，△ABC 的內切圓三等分$\overline{CM}$，求△ABC 面積。

5. z_1 , z_2 , … , z_8為$z^8=-4+5i$的 8 個根， $A(1+i)$， $P_k(z_k)$：
   (1) 求$\overline{AP_1}\cdot\overline{AP_2}\cdot\overline{AP_3}\cdot\overline{AP_4}\cdot\overline{AP_5}\cdot\overline{AP_6}\cdot\overline{AP_7}\cdot\overline{AP_8}=$？
   (2) 求$\sum\limits_{1}^{8}{z_k}^7=$？

6. $a_1=3$, $\forall n\in N$, $a_{n+1}=\frac{2a_n}{3}+\frac{4}{{a_n}^2}$。
   (1) 試證$\langle a_n\rangle$收斂。
   (2) 求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 。

106 新竹高中 70/100 60mins. 以填充一題 5分, 計算一題 10分 計算

一、填充

1. $a^{(\log_3 7)^2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11} 25)^2}$

$=(3^3)^{\log_3 7}+(7^2)^{\log_7 11}+(11^{\frac{1}{2}})^{\log_{11} 25}$

$=3^{\log_3 7^3}+7^{\log_7 11^2}+11^{\log_{11} 25^{\frac{1}{2}}}$

$=343+121+5=469$ #

2. $\left[(t-2)^2+(s-3)^2+(3t+5s-7)^2\right]\left[3^2+5^2+(-1)^2\right]$

$\geq(-14)^2=196 \Rightarrow$ 所求 $Min=\frac{196}{35}=\frac{28}{5}$ #

註: 時間內有檢查等號成立條件

$\frac{t-2}{3}=\frac{s-3}{5}=\frac{3t+5s-7}{-1}=k \Rightarrow k=\frac{-2}{5}$

t, s 有存在對應值

3. $\frac{10^n-1-9^n}{10^n}\to 1$ as $n\to\infty$ #

4. $p+q+r=1$ $\quad \Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\2&1&3\end{vmatrix}=5$

$p+3q+4r=x$

$2p+q+3r=y$ $\quad$ $\frac{1}{5}$ 被自動約掉

$\Delta_p=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&3&4\\y&1&3\end{vmatrix}=-2x+y+5\geq 0$

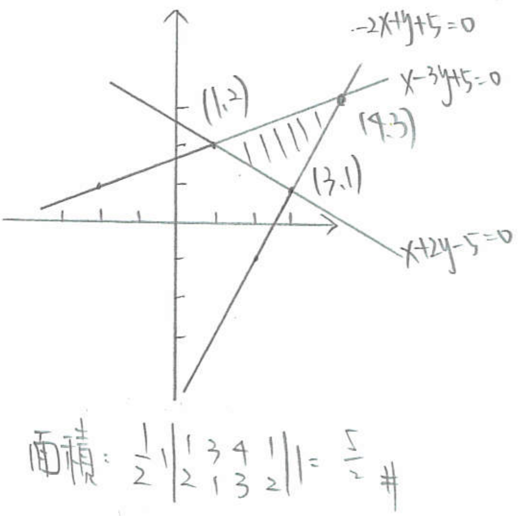
x	2	3
y	-1	1

$\Delta_q=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&4\\2&y&3\end{vmatrix}=x-3y+5\geq 0$

x	-2	1
y	1	2

$\Delta_r=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&x\\2&1&y\end{vmatrix}=x+2y-5\geq 0$

x	1	3
y	2	1



$\begin{cases}-2x+y+5=0\\x-3y+5=0\end{cases}$ 得 $(x,y)=(4,3)$

面積: $\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}1&3&4&1\\2&1&3&2\end{matrix}\right|=\frac{5}{2}$ #

5. $30+35-50=15$ (喜國+英)

$15+40-50=5$ (喜三科) #

6. $\underbrace{a_6<a_7<a_8<a_9<a_{10}<a_{11}<a_{12}}_{6數}$

$\underbrace{a_6<a_5<a_4<a_3<a_2<a_1}_{5數}$ $\quad$ a_6最小 $\Rightarrow a_6=1$

剩下 11 數分兩堆 $\Rightarrow C^{11}_6 C^5_5=462$ #

7. $20\sum_{k=0}^{100}\underbrace{k\cdot C^{100}_k}\cdot(0.3)^k(0.7)^{100-k}=2000\sum_{k=0}^{100}C^{99}_{k-1}(0.3)^k(0.7)^{100-k}$

$=2000\times 0.3\times\sum_{k=0}^{100}C^{99}_{k-1}(0.3)^{k-1}(0.7)^{100-k}=600$.

$17\sum_{k=0}^{100}C^{100}_k(0.3)^k(0.7)^{100-k}=17$

故解為 $600+17=617$ #

8、令 $f'(x)=\frac{1}{1+x^4}$

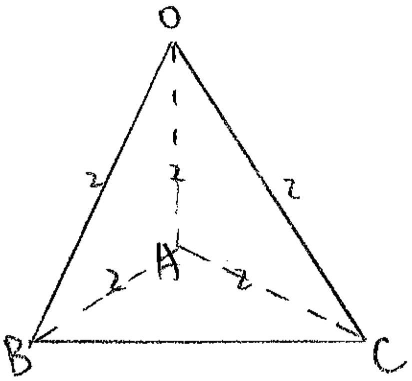
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(9)-f[(3+h)^2]}{h}$$

$$=-f'((3+h)^2)\cdot 2(3+h)\cdot 1\Big|_{h=0}$$

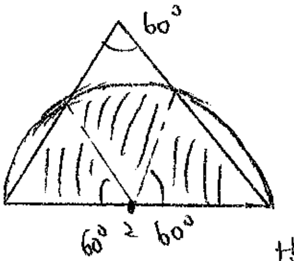
$$=-f'(9)\cdot 6=\frac{-6}{1+9^4}=-\frac{3}{3281}\ \#$$

二、計算

1.



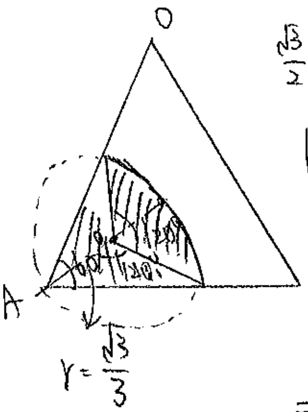
P若在△ABO、△ABC面上，
面積皆為 以$\overline{AB}$為直徑和△OAB所圍面積



$$\frac{\sqrt3}{4}\times 1^2\times 2+1^2\pi\times\frac16=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\pi}{6}$$

故△ABO、△ABC上
為 $2\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt3+\frac{\pi}{3}$

P若在△OAC，△OBC面上 皆為



$\frac{\sqrt3}{2}\times 2=\sqrt3$，$\sqrt3\times\frac23=\frac{2\sqrt3}{3}$

$$\left(\frac12\times\frac{\sqrt3}{3}\times\frac{\sqrt3}{3}\times\sin 120^\circ\right)\times 2+\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^2\pi\times\frac13$$

$r=\frac{\sqrt3}{3}$

$$=\frac{3\sqrt3}{18}+\frac{\pi}{9}=\frac{\sqrt3}{6}+\frac{\pi}{9}$$

故△OAC、△OBC上為 $2\left(\frac{\sqrt3}{6}+\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt3}{3}+\frac{2\pi}{9}$

→ 所求為 $\sqrt3+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt3}{3}+\frac{2\pi}{9}=\frac{4\sqrt3}{3}+\frac{5\pi}{9}$ #

2. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$，$f''(x)=6x+2a$

$ax^2+bx+c+1\Big|_{x=1}=0\Rightarrow a+b+c=-1$

$\lim_{x\to1}\frac{2ax+b}{3x^2}=0\Rightarrow 2a+b=0$

$f'(1)-k=0\Rightarrow 3+2a+b-k=0\Rightarrow k=3$

$\lim_{x\to1}\frac{f''(x)}{3x^2}=0\Rightarrow 6+2a=0$，$a=-3\Rightarrow b=6$
$\Rightarrow c=-4$

故 $(a,b,c,k)=(-3,6,-4,3)$ #

3. Prove $\log_{(n-1)}n>\log_n(n+1)$，$n>2$，$n\in\mathbb{N}$ $\quad \underline{n-1>1}$

Try to prove $\log_{(n-1)}n-\log_n(n+1)>0$

Discuss $\log_{(n-1)}n-\log_n(n+1)=\log_{(n-1)}n+\log_n\frac{1}{n+1}$

$$=\frac{\log n}{\log(n-1)}+\frac{\log\frac{1}{n+1}}{\log n}=\frac{(\log n)^2-\log(n-1)\log(n+1)}{\log(n-1)\log n}\ \cdots\text{原式}$$

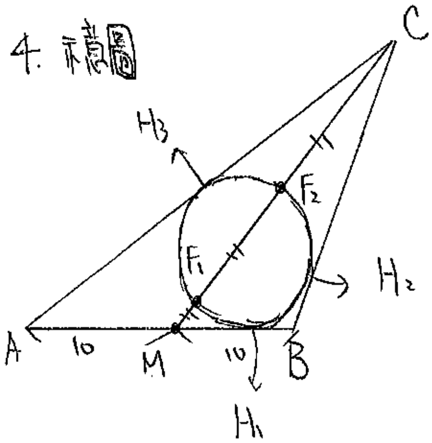
$$(\log n)^2=\left(\frac{2\log n}{2}\right)^2=\left(\frac{\log n^2}{2}\right)^2>\left(\frac{\log(n^2-1)}{2}\right)^2=\left(\frac{\log(n-1)+\log(n+1)}{2}\right)^2$$

$\geq\log(n-1)\log(n+1)$

算幾

故 原式 ≥ 0 得 $\log_{(n-1)}n-\log_n(n+1)>0$ 證 #

4. 示意圖



$\overline{BC}=\overline{BM}=10$

⇑

$\overline{MH_1}^2 = \overline{MF_1}\times\overline{MF_2} = \overline{CF_2}\times\overline{CF_1} = \overline{CH_2}^2 = \overline{CH_3}^2 \Rightarrow \overline{MH_1}=\overline{CH_2}=\overline{CH_3}$

令 $\overline{MH_1}=x \Rightarrow \overline{CH_3}=x$, $\overline{AH_1}=10+x$, $\overline{AH_3}=10+x$

$\Rightarrow \overline{AC}=10+2x$

令 $\overline{CF_2}=y \Rightarrow \overline{MH_1}^2=\overline{CF_2}\times\overline{CF_1} \Rightarrow x^2 = y\cdot(2y) \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{2}$

中線定理 → $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2 = 2(\overline{AM}^2+\overline{CM}^2)$

$(10+2x)^2+10^2 = 2(10^2+(3y)^2)$ 得 $x=8$ 或 0 (不合)

$\overline{AC}=10+16=26$, $\overline{AB}=20$, $\overline{BC}=10 \Rightarrow \triangle ABC$ 面積

$=24\sqrt{14}$ #

5.

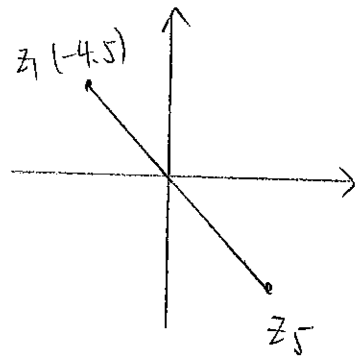
(1) $z^8-(-4+5i)=(z-z_1)\cdots(z-z_8)$

所求 $\left|(1+i)^8+4-5i\right| = |20-5i| = \sqrt{425}$

$=5\sqrt{17}$ #

(2) z_k 之置換 ⇒ 仍為原 8 根

$z_1+z_2+\cdots+z_8=0$ #



6. 因 $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{2a_n}{3}+\frac{4}{a_n^2} \Rightarrow a_{n+1}$ 恆 $>0 \Rightarrow a_{n-1}>0$ (算幾)

* 收斂
↓
檢查極值 &
遞增遞減性

(1) $a_n=\frac{2a_{n-1}}{3}+\frac{4}{(a_{n-1})^2} \Rightarrow \dfrac{\frac{a_{n-1}}{3}+\frac{a_{n-1}}{3}+\frac{4}{(a_{n-1})^2}}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \Rightarrow a_n \ge \sqrt[3]{\frac{4}{9}\times 27} = \sqrt[3]{12}$

↳ $a_n^3 \ge 12$

$a_{n+1}-a_n = \frac{4}{a_n^2}-\frac{a_n}{3} = \frac{12-a_n^3}{3a_n^2} \le 0$

↳ 遞減有下界 ⇒ 收斂得證 #

(2) 令 $x=\lim\limits_{n\to\infty}a_n \Rightarrow x=\frac{2x}{3}+\frac{4}{x^2}$ 解得 $x=\sqrt[3]{12} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{12}$ #