40/80　60 mins.

國立臺中文華高級中學104學年度第一次教師甄選
數學科專業知能試題本(填充題部份)

測驗說明:
1. 本試題分填充題(80分)及計算證明題(20分);填充題分二部分，第一部分每格4分，第二部分每格 6分，皆不需計算過程;計算證明題，需詳列計算過程或說明理由。
2. 另附五張 A4計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。
3. 填充題作答說明：請將正確的答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，不需計算過程。
4. 計算證明題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由，否則不予計分;若空間不夠可於答案卷背面，清楚標列題號繼續作答。

一、填充題：

第一部份：(每格4分)

1.將一長、寬、高分別為3、6、9的長方體盒子置放於桌面上(設為xy平面)，若已知其中一頂點A(2,1,0)，與A相鄰兩頂點坐標為B(3,3,2)、C(8,－5,3)，則此長方體最高點距離桌面高度為__________。

2.一正數x的整數部分記為a (即$a=[x]$，$[\ ]$為高斯記號)，小數部分記為b，其中$0\le b<1$，則所有滿足$a^2=x\cdot b$的正數x為__________。

3.化簡$(\sqrt{19}+\sqrt{20}+\sqrt{21})(\sqrt{19}+\sqrt{20}-\sqrt{21})(\sqrt{19}+\sqrt{21}-\sqrt{20})(\sqrt{20}+\sqrt{21}-\sqrt{19})$之值為__________。

4.設$f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x\sqrt{x^2+7}-4x}$,其中$a,b,c,d$為實數，若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to3}f(x)=4$，則數組$(a,b,c,d)$＝__________。

5.設z為複數平面上的點，則所有滿足方程式$z^4+4\sqrt{2}z^3i-12z^2-8\sqrt{2}zi-4i=0$ (其中$i=\sqrt{-1}$)的z點所形成的凸多邊形面積為__________。

6.滿足集合$\{(\log_2 a,(\log_2 b)^2)\,|\,1\le a\le 4,\ a^2\le b\le 2a\}$的點在平面直角座標中形成一區域，則此區域的面積為__________。

7.長方體 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，外接球的球心為 O，外接球的體積為 $\frac{32\pi}{3}$。設 $\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CC_1}=c$，若 $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}$ 的最小值為 $\frac{9}{4}$，則 A 、 C 兩點的球面距離為__________。

8.請用你所知的指對數公式及數值，求最接近 $36^{0.875}$ 的整數為________。
(可參考下列的常用對數表)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732

第二部份：(每格6分)

9.已知 $(5x+2y)^{425}+x^{425}+6x+2y=0$，則 $9x^2+6xy+y^2+12x+4y+5=$__________。

10.若α、β、γ是一元三次方程式 $2x^3-3x^2-12x+16=0$ 的三個根，則 $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)$ 的值為__________。

11.有某些6位數，其個位數、十位數、百位數、千位數、萬位數、十萬位數依序為 a,b,c,d,e,f，若要求 $a\le b<c\le d<e\le f$，則滿足此條件的6位數共有______個。

12.設 a_1，a_2，a_3，…，a_{104} 為一等差數列，b_1，b_2，b_3，…，b_{104} 為一等比數列，若級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{104}=2015$，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{104}=520$，且兩數列滿足 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_{104}b_{104}=20000$，求 $a_1b_{104}+a_2b_{103}+a_3b_{102}+\cdots+a_{104}b_1=$________。

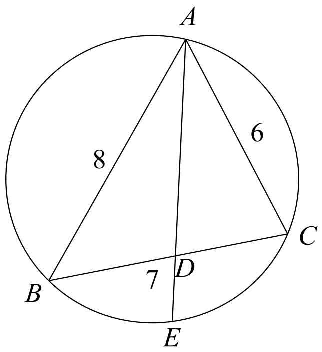
13.一四面體 ABCD，其中 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=7$，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{BD}=6$，若 E 為 ΔBCD 內部一點，x 為 E 到 ΔABC 、 ΔACD 、 ΔABD 的距離和，y 為 E 到 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{BD}$ 的距離和，則 $\frac{x}{y}$ 所有可能的值為__________。

14.若正奇數n及一銳角θ使得聯立方程組$\begin{cases}(1+\csc\theta)^n x-y=0\\(1+\sec\theta)^n y+z=0\\5^n x+(\sin 2\theta)^n z=0\end{cases}$的解不只一組，則

$\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\cot\theta+\sec\theta+\csc\theta=$__________。

15.如圖，在ΔABC中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=6$，$\angle BAE=\angle CAE$，

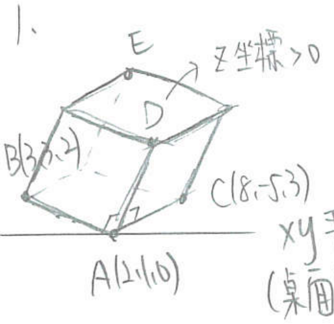
E點在ΔABC的外接圓上，求線段$\overline{AE}$之長為__________。



16.袋中有卡片 6 張，卡號分別為 1，1，2，3，4，5 且每張被抽中的機會均等，一次取一張，取後不放回，今連續抽取直到 1 出現第二次為止，則抽取次數之變異數為__________。

104 文華高中 40/80 60 mins.

1.



$\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=9$

$\Rightarrow \overline{AD}=6$

xy平面 (桌面)

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(18,9,-18)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=(4,2,-4)\to(-4,-2,4)$

最高點為E $\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(3,-6,9)$

故距桌面高度 $=9$ #

2. $x=a+b$ 而 $a^2=x\cdot b$ $\Rightarrow a(a-b)=b^2$

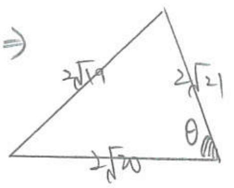
x ↓ 整數 $\quad =(a+b)\cdot b$

↳ $a=1 \Rightarrow b^2+b-1=0$

故得 $b=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (取正), 故 $x=a+b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ #

3. 海龍公式, $S=\sqrt{19}+\sqrt{20}+\sqrt{21}$ $\Rightarrow$

原式為面積平方



餘弦得 $\cos\theta=\frac{11}{2\sqrt{105}}$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{299}}{2\sqrt{105}}$, △面積 $=\frac{1}{2}\times2\sqrt{20}\times2\sqrt{21}\times\frac{\sqrt{299}}{2\sqrt{105}}$

$=2\sqrt{299}$

故所求 $=4\times299=1196$ #

4. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$ $\Rightarrow$ $a=0$ (分母次方只有2)

$b=2$ #

而因 $\left(x\sqrt{x^2+7}-4x\right)\Big|_{x=3}=0$

故 $\left(2x^2+cx+d\right)\Big|_{x=3}=0 \Rightarrow 3c+d=-18$

羅必達

$\frac{12+c}{9/4}=4 \Rightarrow (c,d)=(-3,-9)$ #

5.

$(z+\sqrt{2}i)^4$

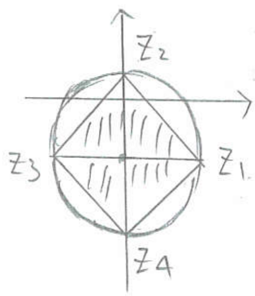
$\|$

$z^4+4(\sqrt{2}i)z^3+6(\sqrt{2}i)^2z^2+4(\sqrt{2}i)^3z+(\sqrt{2}i)^4$

$=z^4+4\sqrt{2}z^3i-12z^2-8\sqrt{2}zi+4=4i+4$

$\Rightarrow |z+\sqrt{2}i|^4=|4i+4|=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$ 有4根 (90°)

$|z+\sqrt{2}i|=2^{\frac{5}{8}}$, $M(0,-\sqrt{2})$, $r=2^{\frac{5}{8}}$



$4\times\left[2^{\frac{5}{8}}\times2^{\frac{5}{8}}\times\frac{1}{2}\times\sin90^\circ\right]$

$=2^{2+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+(-1)}$

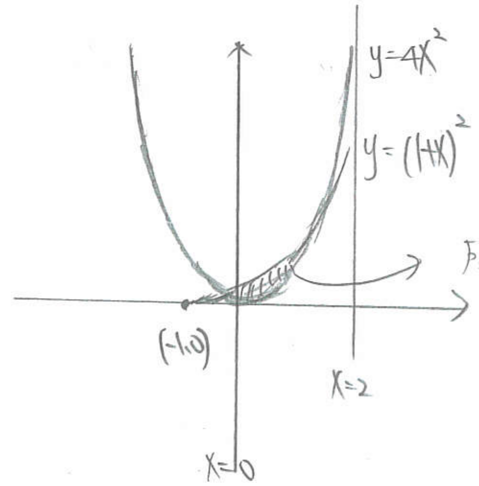
$=2^{\frac{9}{4}}$ #

6. $1\le a\le4 \Rightarrow 0\le\log_2 a\le2 \longrightarrow 0\le x\le2$

$a^2\le b\le2a \Rightarrow 2\log_2 a\le\log_2 b\le1+\log_2 a \longrightarrow 4x^2\le y\le(1+x)^2$

令 $x=\log_2 a$, $y=(\log_2 b)^2$ $\quad 4x^2 \overset{let}{=} (1+x)^2$ 解得 $x=-\frac{1}{3}$ 或 1

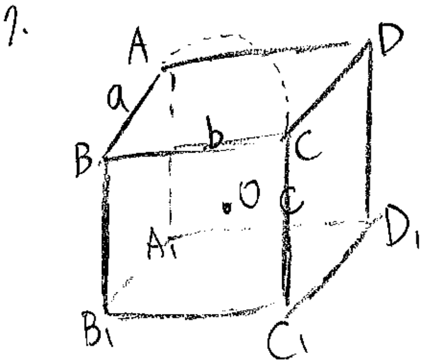
↓ 頂點 $(-1,0)$



故所求面積為 $\int_0^1\left[(1+x)^2-4x^2\right]dx$

$=1$ #

7.



$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$

$\Rightarrow R=2=\overline{OA}=\overline{OC}$ (外接球)

柯西 $\Rightarrow (a^2+b^2)\left(\frac{1}{a^2}+\left(\frac{2}{b}\right)^2\right) \ge (1+2)^2=9$

$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right) \ge \frac{9}{a^2+b^2}=\frac{9}{4}$

得 $a^2+b^2=4 \Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}=2$ 故 $\triangle OAC$ 為正三角形

$\widehat{AC}=R\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}$ #

8. $x=36^{0.875} \Rightarrow \log x = 0.875\times(2\log 6)=1.361675$

$1.361675 \cong \underbrace{1}_{\log 10}+\underbrace{0.3010}_{\log 2}+\underbrace{0.0616}_{\log 1.15} \Rightarrow x=10\times2\times1.15$
$=23$ #

log 同底者相加，真者相乘 (計時內失誤…)

9. $x,y=0$ 代入原式 $\Rightarrow$ 所求為 $0+5=5$ #

10. $\frac{(\alpha^3-\beta^3)(\beta^3-\gamma^3)(\gamma^3-\alpha^3)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$

$\downarrow$

$\frac{27}{8}\left(\frac{11}{2}-\alpha\right)\left(\frac{11}{2}-\beta\right)\left(\frac{11}{2}-\gamma\right)$

$\|$

$\frac{27}{8}\times\left[x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+8\right|_{x=\frac{11}{2}}$

$=\frac{27}{8}\times96=27\times12=324$ #

而 $2\alpha^3-3\alpha^2-12\alpha+16=0$
$-)\ 2\beta^3-3\beta^2-12\beta+16=0$
$2(\alpha^3-\beta^3)-3(\alpha^2-\beta^2)-12(\alpha-\beta)=0$

$\alpha\neq\beta$

$\Rightarrow \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=6+\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$
$=6+\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)=\frac{33}{4}-\frac{3}{2}\gamma$
$=\frac{3}{2}\left(\frac{11}{2}-\gamma\right)$

11. 用C算(組合) $\Rightarrow$ 不想有等號"="

令 $b'=b+1$, $c'=c+1$ (跟著平移，保持"<")

$d'=d+2$, $e'=e+2$, $f'=f+3$

原從 $0\sim9$ 挑，現為 $0\sim9+3=12$ 中挑

故所求為 $C^{13}_6=1716$ #

註：$0\sim12$ 有13個選擇(個數)

(計時內失誤)

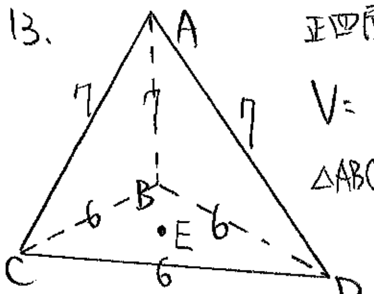
12. $a_1+a_{104}=\frac{2015\times2}{104}$

$\underbrace{\overset{x}{(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{104}b_{104})}+(a_1b_{104}+a_2b_{103}+\cdots+a_{104}b_1)}$

$=(a_1+a_{104})(b_1+b_2+\cdots+b_{104})=\frac{2015\times2}{104}\times520$
$=20150$

故 $20000+x=20150 \Rightarrow x=150$ #

13.



正四面体ABCD

$V=3\sqrt{111}$

$\triangle ABC=6\sqrt{10}$, $\triangle ABD=6\sqrt{10}$

$\triangle BCE=9\sqrt{3}$ $\triangle ACD=6\sqrt{10}$

將四面体拆成以E為頂点，三側面為底面積的角錐 $\Rightarrow (6\sqrt{10}+6\sqrt{10}+6\sqrt{10})\times x\cdot\frac{1}{3}=3\sqrt{111}$

$x=\frac{3\sqrt{111}}{6\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{111}}{2\sqrt{10}}$

將正$\triangle BCD$ 拆成以BC、BD、CD為底，E頂点的$\triangle$

$\Rightarrow 9\sqrt{3}=(3+3+3)\cdot y \Rightarrow y=\sqrt{3}$

$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{37}}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{370}}{20}$ #

14. 不只一組 ⇒ $\Delta = 0$

$$\begin{vmatrix} (1+\csc\theta)^n & -1 & 0 \\ 0 & (1+\sec\theta)^n & 1 \\ 5^n & 0 & (\sin 2\theta)^n \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (1+\csc\theta)^n (1+\sec\theta)^n (\sin 2\theta)^n = 5^n$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)(2\sin\theta\cos\theta) = 5$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta + 2\cos\theta + 2 = 5$

令 $x = \sin\theta + \cos\theta$, $\frac{x^2-1}{2} = \sin\theta\cos\theta$

(註: $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$)

$\Rightarrow x^2 - 1 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$

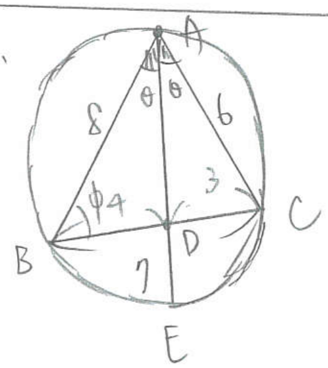
因 $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$，故 x 取 $-1+\sqrt{5} = \sin\theta + \cos\theta$

$\frac{5-2\sqrt{5}}{2} = \sin\theta\cos\theta$

所求為 $(\sin\theta + \cos\theta) + \left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) + \left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$

$= (-1+\sqrt{5}) + \left(\frac{2}{5-2\sqrt{5}}\right) + (-1+\sqrt{5}) \times \frac{2}{5-2\sqrt{5}} = 3+3\sqrt{5}$ #

15.



$\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$

故 $\overline{BD}$ 恰 $= 4$, $\overline{DC} = 3$

$36 = 64 + 49 - 112\cos\phi$

得 $\cos\phi = \frac{11}{16}$

$\overline{AD}^2 = 64 + 16 - 64 \times \frac{11}{16} = 36$, $\overline{AD} = 6$

$6 \times \overline{DE} = 4 \times 3 \Rightarrow \overline{DE} = 2$

故 $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 6 + 2 = 8$ #

16.

$P(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$P(X=3) = C^2_1 \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{15}$

$P(X=4) = C^3_2 \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

$P(X=5) = C^4_3 \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$

$P(X=6) = C^5_4 \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$

$E(X) = 2 \times \frac{1}{15} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{4}{15} + 6 \times \frac{1}{3}$

$= \frac{14}{3}$

$E(X^2) = 4 \times \frac{1}{15} + 9 \times \frac{2}{15} + 16 \times \frac{1}{5} + 25 \times \frac{4}{15} + 36 \times \frac{1}{3}$

$= \frac{70}{3}$

$Var(X) = \frac{70}{3} - \frac{196}{9} = \frac{14}{9}$ #

計算一：

$a_n = \frac{3a_{n-1}+5}{a_{n-1}-1}$, $a_1 = 3$, 求 a_n 一般型式.

不动点 → $x = \frac{3x+5}{x-1} \Rightarrow x = -1$ 或 5

$\frac{a_n-(-1)}{a_n-5} = \frac{\frac{3a_{n-1}+5}{a_{n-1}-1}+1}{\frac{3a_{n-1}+5}{a_{n-1}-1}-5} = (-2)^1 \times \left(\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}-5}\right) = \cdots = (-2)^{n-1}\left(\frac{a_1+1}{a_1-5}\right)$

$= (-2)^{n-1} \times (-2) = (-2)^n$

$\frac{a_n+1}{a_n-5} = (-2)^n \Rightarrow a_n = \frac{5\cdot(-2)^n+1}{(-2)^n-1} = \frac{5+\frac{1}{(-2)^n}}{1-\frac{1}{(-2)^n}} = -1 + \frac{6}{1-\frac{1}{(-2)^n}}$ #

計算二:

橢圓: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, P為短軸端點外一點, 且與短軸兩端點連線交長軸直線於Q,R兩點,

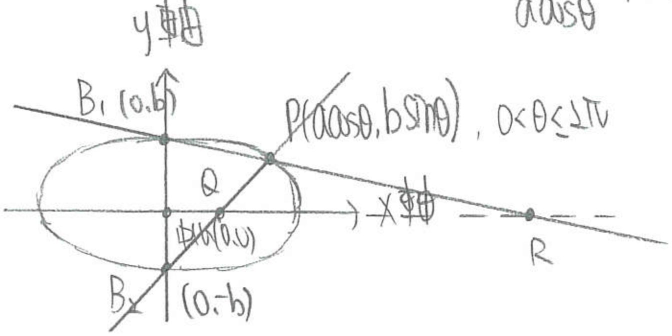
證明 $\overline{OQ}\times\overline{OR}$ 為定值. 註: P要在橢圓上

(長軸直線 → x軸)

示意圖

$m_{\overline{B_1P}}=\frac{b\sin\theta-b}{a\cos\theta}$, $\overline{B_1P}$: $y-b=\frac{b\sin\theta-b}{a\cos\theta}x$, $y=0$代入 得 $x=\frac{-a\cos\theta}{\sin\theta-1}$

$m_{\overline{B_2P}}=\frac{b\sin\theta+b}{a\cos\theta}$, $\overline{B_2P}$: $y+b=\frac{b\sin\theta+b}{a\cos\theta}x$, $y=0$代入 得 $x=\frac{a\cos\theta}{\sin\theta+1}$



故 $\overline{OQ}\times\overline{OR}=\left|\frac{-a^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta-1}\right|=a^2$ #

計算三:

圓C_1: $(x-5)^2+(y+5)^2=4$, 逆時針旋轉 a 角度 $(0<a<2\pi)$ 得圓C_2, 再对 $y+2x=0$ 鏡射得圓C_3,

求C_3圓心. $M_1(5,-5)$

$$\begin{pmatrix}\cos A & -\sin A\\ \sin A & \cos A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cos A+5\sin A\\ 5\sin A-5\cos A\end{pmatrix}$$

此点对 $2x+y=0$ 作对稱点

$$\left(5\sin A+5\cos A-2\times2\times\frac{10\cos A+10\sin A+5\sin A-5\cos A}{5},\ 5\sin A-5\cos A-2\times1\times\frac{10\cos A+5\sin A+5\sin A-5\cos A}{5}\right)$$

$$=(5\sin A+5\cos A-12\sin A-4\cos A,\ 5\sin A-5\cos A-6\sin A-2\cos A)$$

$$=(\cos A-7\sin A,\ -7\cos A-\sin A)$$

#