66/100　60 mins.

國立臺中文華高級中學 102 學年度第一次教師甄選
數學科專業知能試題本

測驗說明:
1. 本試題分填充題(80 分)及計算證明題(20 分)；填充題分二部分，第一部分每格 4 分，第二部分每格 6 分，皆不需計算過程；計算證明題，需詳列計算過程或說明理由。
2. 另附五張 A4 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙左上角請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、 填充題：(請將正確的答案填入正確的題格中，分式需化至最簡，根式需有理化，否則不予計分，不需計算過程)

第一部分：(每格 4 分)

1. 設 x、y、z 均為實數，且 $x-y=2+\sqrt{3}$，$x-z=2-\sqrt{3}$，則 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ ＝______________ 。

2. 求下列的級數和：
$1\times2+(1\times2+2\times3)+(1\times2+2\times3+3\times4)+\ldots+(1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(n-1)\times n)=$ ________ 。

3. 坐標平面中，$A(3，6)$ 、$B(5，10)$、$C(8，12)$、$D(4，6)$，若 M 為 $\overline{AB}$ 中點，N 在 $\overline{CD}$ 上，$\overline{MN}$ 將四邊形 $ABCD$ 的面積分為兩等分，求 N 點坐標為________ 。

4. 已知三事件 A、B、C 為獨立事件且 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(C)=\dfrac{1}{4}$，求 $P(A\cup B\cup C)=$ ________

5. 若正整數 x,y,z 的最小公倍數為 360，且 $a=x\cdot10^6+y\cdot10^3+z$，則 a 的可能值有_____個。

6. 由 1，2，3，…，20 挑出 x_1，x_2，x_3 三個數字，且 $x_1<x_2<x_3$．求 x_1 與 x_2 至少差 3，x_2 與 x_3 至少差 5 的機率為_____________ 。

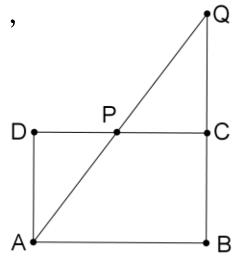
7. 設 A,B,C,D,E 表示 $z^5=i$ 之五根在複數平面上的對應點，若點 P 為 $1+i$ 在複數平面上的對應點，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}$ 之值為____________ 。

8. 已知甲袋中有 1 黑球 2 白球，乙袋中有 1 白球 2 黑球，設每一球被取到之機會均相同，今同時從甲袋及乙袋中各取 1 球互相交換，此叫做一回合，試求長期操作後，當達穩定狀態時，甲袋中為 3 白球之機率為____________ .

第二部分：(每格 6 分)

9. 設 $a_1+2a_2+3a_3+\ldots\ldots+na_n=C_3^{n+2}+n^3+2n^2+n+2$，則 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_{10}=$________。

10. 如右圖，矩形 $ABCD$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=1$，若過 A 點作一直線交 $\overline{CD}$ 於 P，且與 $\overline{BC}$ 邊的延長線交於 Q，若使 ΔADP 與 ΔCPQ 的面積和為最小，求此時 $\overline{DP}$ 的長度為____________。



11. 設 $f(a,b)=(61-a-28b)^2+(62-a-29b)^2+(60-a-30b)^2+(58-a-31b)^2+(59-a-32b)^2$，當 $f(a,b)$ 有最小值時，求此時數對 $(a,b)=$__________。

12. 將 63，91，129 三數除以某一自然數後，所得的三個餘數和為 25，則此自然數為________。

13. 設函數 $y=f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2-x}$，求 $\dfrac{f^{(7)}(1)}{f^{(5)}(1)}=$__________________

【註：$f^{(n)}(a)$ 表示在 $x=a$ 處的 n 階導數】

14. 坐標空間中，點 $A(6,3,4)$，點 $B(4,8,3)$，點 P 為 x 軸上任一點，點 Q 為 y 軸上任一點，求 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 最小值__________。

15. 雅妮參加擲骰子比賽，遊戲規則如下：每次投擲二顆相同的公正骰子，
(1) 若擲出點數和為 7 點，可得獎金 100 元，並可以繼續投擲；
若再擲出點數和為 7 點，則再得 100 元，並可以繼續投擲，以此類推，
(2) 若擲出點數和不是 7 點，則得 30 元，並結束比賽。
則雅妮參賽的獎金期望值為____________。

16. 設 $f(x)=\dfrac{\prod_{k=0}^{50}(x-2k)}{\prod_{k=1}^{50}(x+k)}$，求 $\log_2 f'(0)$ 值=____________。

102 文華高中 $\frac{66}{100}$ 60 mins.

一、填充

第1部份.

1. $\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right]$

而因 $(x-z)-(x-y)=y-z=-2\sqrt{3}$

原式 $=\frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2\right]=13$ #

2. $1\times2\times\underbrace{(n-1)}_{個}+2\times3\times(n-2)+\cdots+(n-1)n\times\underbrace{1}_{個}$

$=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)[n-k]=\sum_{k=1}^{n-1}nk(k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^3+k^2)$

$=n\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^3+k^2)=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{12}$ #

代公式整理

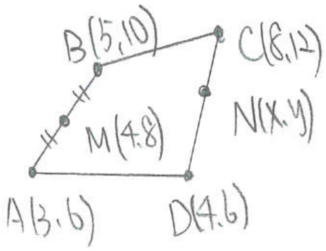
3.

四邊形ABCD面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}3&4&8&5&3\\6&6&12&10&6\end{matrix}\right|=7$

" " " AMND " " " $=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}3&4&x&4&3\\6&6&y&8&6\end{matrix}\right|=|x-3|$

$\frac{7}{2}=|x-3|\Rightarrow x-3=\pm\frac{7}{2}$, $x=\frac{13}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$

(不合, by graph)



而 $\overline{CD}$: $y=\frac{3}{2}x$

則 $y=\frac{39}{4}$

解 $N(\frac{13}{2},\frac{39}{4})$ #

4.

$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{3}{4}$ #

5. $360=2^3\times3^2\times5$

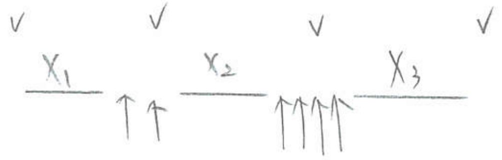
(x,y,z) 的可能性 ⇒ 挑 2, 3, 5 次方

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$

$(4^3-3^3)(3^3-2^3)(2^3-1^3)=37\times19\times7=4921$ #

扣除大家都從 $\{2^0,2^1,2^2\}$ 中挑 (沒選到 2^3)

6.



四個空隙塞剩下17個數 (但有2個, 4個必先進中間兩空隙)

$H^4_{17-6}=H^4_{11}=C^{14}_{11}=364$ 而全 $=C^{20}_3=1140$

$P=364/1140=91/285$ #

7.

$z^5-i=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)$

五根 A, B, C, D, E 為 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5

所求為 $|(1+i)-z_1|\cdot|(1+i)-z_2|\cdot\cdots\cdot|(1+i)-z_5|$

$=|(1+i)^5-i|=|-4(1+i)-i|=|-4-5i|$

$=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$

#

8.

$\Rightarrow$ 古典機率 $\Rightarrow$ $C^3_3 / C^6_3 = \frac{1}{20}$ #

共3白3黑，甲要3顆白球(袋中三顆)

9. $na_n = \left(C^{n+2}_3 + n^3 + 2n^2 + n + 2\right) - \left(C^{n+1}_3 + (n-1)^3 + 2(n-1)^2 + (n-1) + 2\right)$

$= \cdots = \frac{7n^2}{2} + \frac{3n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{7n+3}{2}$ as $n \geq 2$

(因公式是利用$S_n - S_{n-1}$得a_n)

故 $\left(\sum_{n=1}^{10} \frac{7n+3}{2} - \frac{7\cdot1+3}{2}\right) + \underbrace{C^{1+2}_3 + 1^3 + 2\cdot1^2 + 1 + 2}_{a_1} = \frac{415}{2} - 5 + 7 = \frac{419}{2}$ #

10. 設 $\overline{DP} = x \Rightarrow \overline{PC} = 4-x$，利用 $\overline{PC} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{QB}$

得 $\overline{QC} = \frac{4-x}{x}$

故 $\triangle ADP + \triangle CPQ = \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{x}(4-x)^2}{2}$

focus on $x + \frac{1}{x}(4-x)^2 = \frac{2(x^2-4x+8)}{x}$

focus on $\frac{x^2-4x+8}{x} = \underbrace{x - 4 + \frac{8}{x}}_{\text{算几}(x>0)} \geq -4 + 2\sqrt{2}$

等號成立 $\Leftrightarrow$ $x = \frac{8}{x}$, $x = 2\sqrt{2}$ (取正) #

11. (解1) 偏微

(時間扣的作法)

(解2)

設有一直線 $y = bx + a$

五點 (28, 61), (29, 62), (30, 60), (31, 58), (32, 59)

$(61 - a - 28b)^2 =$ (28, 61) 和 (28, 28b+a) 的距離平方和

$\rightarrow$ Min. 發生在此線為迴歸直線時

$\Rightarrow$ 過 $(\mu_x, \mu_y) = (30, 60)$

$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{(-2)+(-2)+0+(-2)+(-2)}{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2} = -\frac{4}{5}$

故 $y - 60 = -\frac{4}{5}(x - 30)$

$y = -\frac{4}{5}x + 84$

$(a, b) = (84, -\frac{4}{5})$ #

12.

$63+91+129=283$

$283-25=258$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 258 \\ 3 & 129 \\ & 43 \end{array}$$

該數必 < 63 ⇒ 6 或 43

若是6 ⇒ 餘數和 = 3+1+9 ≠ 25

若是43 ⇒ 餘數和 = 20+5+0 = 25

故此數為 43 #

13. $f(x)=(-x)+(2-x)^{-1}$

$f'(x)=-1+(-1)\cdot(2-x)^{-2}\cdot(-1)=-1+(2-x)^{-2}$

$f''(x)=-2(2-x)^{-3}\cdot(-1)=2(2-x)^{-3}$

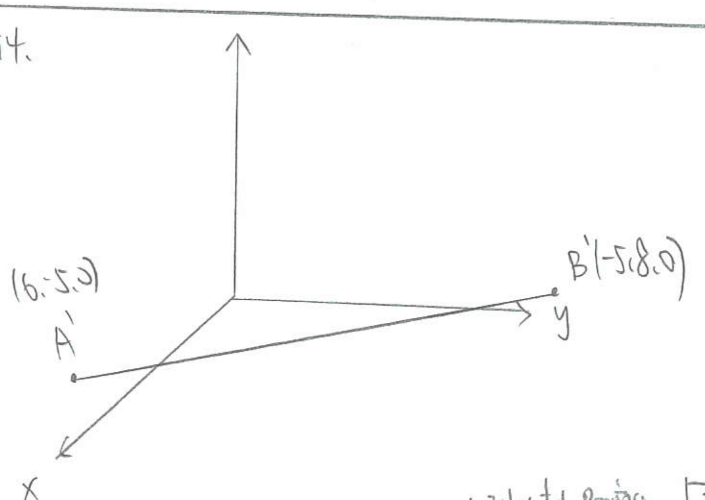
$\Rightarrow f^{(n)}(x)=n!\,(2-x)^{-(n+1)}$

$f^{(7)}(1)=7!\,(2-1)^{-(7+1)}=7!$

$f^{(5)}(1)=5!\,(2-1)^{-(5+1)}=5!$

所求 $=\dfrac{7!}{5!}=42$ #

14.



A到x軸距離 $=\sqrt{3^2+4^2}=5$

A到x軸距離不動 ⇒ 以A在x軸的投影點為圓心,旋轉A到xy平面(6,-5,0) by graph. 知要轉到y負向

B〃y〃〃〃〃〃 ⇒ 〃B〃y〃〃〃〃〃〃〃〃,〃〃〃B〃 〃 (-5,8,0) 〃 〃 〃 〃 〃 〃X〃〃〃

此時 min $=\sqrt{121+169}=\sqrt{290}$ #

15. P(點數和7) $=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

$\frac{5}{6}\times30+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times(100+30)+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times(200+30)+\cdots$

$$\begin{cases} 100\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}\times2+\cdots\right) \\ 30\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}^2\times\frac{5}{6}+\cdots\right) \end{cases}$$

$S=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+2\times\frac{1}{6}^2\times\frac{5}{6}+\cdots$

$\frac{1}{6}S=\quad 1\times\frac{1}{6}^2\times\frac{5}{6}+\cdots$

$\frac{5}{6}S=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}^2\times\frac{5}{6}+\cdots \Rightarrow S=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\cdots$

$a_1=\frac{1}{6},\ r=\frac{1}{6},\ S_\infty=\frac{1}{5}$

$S'=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\cdots$

$a_1=\frac{5}{6},\ r=\frac{1}{6},\ S_\infty=1$

所求為 $100\times\frac{1}{5}+30\times1$

$=20+30$

$=50$ #

16.

$$f(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+50)}$$

$$=x\cdot\left(1-\frac{3}{x+1}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{x+2}\right)\cdots\left(1-\frac{150}{x+50}\right)$$

$$f'(0)=\left[\left(1-\frac{3}{x+1}\right)\left(1-\frac{6}{x+2}\right)\cdots\left(1-\frac{150}{x+50}\right)+0\right]\Bigg|_{x=0}$$

其他括號都會留X 所以就全0

$$=(1-3)(1-3)\cdots(1-3)$$

$$=(-2)^{50}=2^{50}$$

$$\log_2 f'(0)=50 \ \#$$

計算一：

平面上有三定點ABC及一圓，O為圓心，r為半徑，

中點 → 中線定理

若AOBC為平行四邊形，$\overline{AB}$與圓不相交，

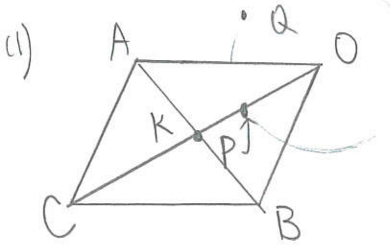
若圓上有一點P，使得 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 為最小時，

中線定理

(1) 試證：P為$\overline{OC}$和圓的交點

(2) 試利用$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、r來表示 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值。

(1)



設$\overline{AB}$、$\overline{OC}$兩對角線交點為K

設取異於P點的Q∈圓

$\triangle QAB$中 $\overline{QA}^2+\overline{QB}^2=2(\overline{QK}^2+\overline{AK}^2)$

$\triangle PAB$中 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PK}^2+\overline{AK}^2)$

而又因圓中離K最近的點即為P (圓和$\overline{OC}$交點)

故 $\overline{PK}^2<\overline{QK}^2 \iff \overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 為最小 #

(2) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PK}^2+\overline{AK}^2)$

$\overline{AB}=\overline{OC}$

$$=2\left[\left(\tfrac{1}{2}\overline{OC}-r\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\overline{AB}\right)^2\right]=\overline{OC}^2-2\overline{OC}\cdot r+2r^2 \ \#$$

計算二：

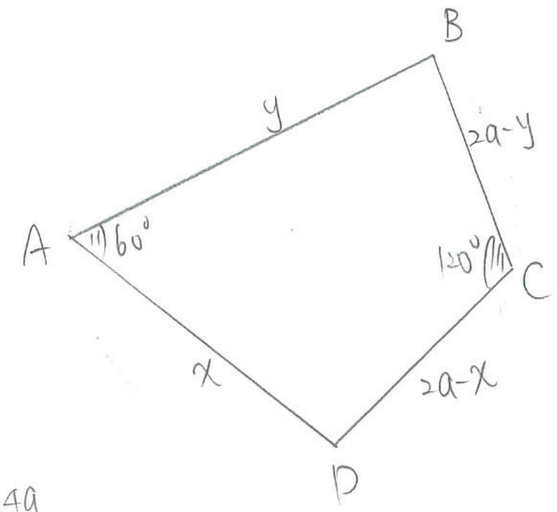
橢圓焦點為A、C，橢圓上有B、D兩點

其中四邊形ABCD的四邊長乘積為2013

且∠BAD=60°，∠BCD=120°，求ABCD面積=？

圓內接

根據題意可畫出以下示意圖



$$s=\frac{4a}{2}=2a$$

$$\sqrt{(2a-y)(y)(2a-x)(x)}=\sqrt{2013} \ \#$$

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)}$$

圓內接 B+D=180°

0

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$