70/100 60 mins.

新竹高中107學年度數學科教師甄試試題

第一部分(填充題，每題5分)

1. 設 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3\}$，$f:A\to B$，使 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=8$ 有幾種?

2. 實係數四次方程式 $x^4-8x^3+24x^2+ax+b=0$ 爲兩實根兩虛根，兩實根和爲 4，兩虛根積爲 5，求 (a,b)。

3. A,B 爲相異四位數的正整數，$\log A$ 的尾數爲 $\log B$ 的 3 倍，若 A 的最大值爲 m，此時 B 的最大值爲 n，求 (m,n)。

4. 某老師一天可能有 3 到 5 堂數學課(一天有 8 堂)，然後不能有連 3 而且第 4 第 5 節不能同時排，問一天有多少種排數學課方式(不考慮不同班級)。

5. 有兩條直線 $L_1:y=2x-106$、$L_2:y=3x-107$，平面座標上有一點 $P(4,5)$ 對 L_1 的對稱點爲 Q，Q 對 L_2 的對稱點爲 R，L_1、L_2 的交點爲 K，則 $\tan\angle PKR$ 爲?

6. $x,y\in\mathbb{R}$，$-2\le y\le\sqrt{25-x^2}$，$x+2y$ 的最大值爲 M、最小值爲 m，數對 (M,m) 爲?

7. $a,b,c\in\mathbb{R}$，若 $a^2+b^2+c^2=10$、$d^2\le 4$，求 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & d & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ 的最大值。

8. $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$，求 $|2-\omega|^2+|2-\omega^2|^2+\cdots+|2-\omega^6|^2$。

9. $a_n=\left[1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^4\right]+\left[1-\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^4\right]+\left[1-\left(\dfrac{n-3}{n}\right)^4\right]+\cdots+\left[1-\left(\dfrac{n-2n}{n}\right)^4\right]$，求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$。

10. $L:\dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-1}{6}$ 上的一點 $A(-6,-4,1)$，$E:19x-4y+8z=8$，L 與 E 交於一點 B，在平面上有一點 C，使得 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則當 $\triangle ABC$ 面積最大時，C 點座標爲?

第二部分(計算題，每題10分)

1. $f(x)$ 爲 3 次實係數多項式，$f(x)$ 在 $x=1$ 以及 $x=5$ 時有極值，且 $f(x)$ 在 $(3,f(3))$ 的切線方程式爲 $y=4x-12+f(3)$，求 $\int_0^2 f'(x)dx$。

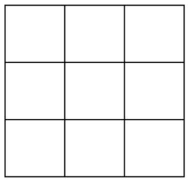
2. 數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項之和爲 S_n。若 $a_1=\dfrac{4}{3}$、$(4^n-1)a_n=3\times 4^{n-1}S_n$，求下列各小題:
(1) S_n。
(2) 設 $b_n=\dfrac{n}{3a_n}$，T_n 爲 $\langle b_n\rangle$ 前 n 項之和，求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$。

3. (1) 求 $x^2+y^2=2$ 與 $y=1$ 所圍成較小的弓形繞 x 軸旋轉的旋轉體體積。

(2) 求 $x^2+y^2=2$ 與 $x+y=\sqrt{2}$ 所圍成較小的弓形繞 $x+y=\sqrt{2}$ 旋轉的體體積。

4. 設 $X \sim B(n,p)$，求 $E(\dfrac{1}{X+1})$。

5. 用 4 種顏色塗右圖九宮格，顏色可重複使用，相鄰不同色，每區只能塗一色，有幾種塗法?



107 新竹高中 70/100 60 mins.

一、填充

1.
$(3,3,1,1) \to \frac{4!}{2!2!} = 6$
$(3,2,2,1) \to \frac{4!}{2!} = 12$
$(2,2,2,2) \to 1$
$6+12+1=19.$

2. $(x^2-4x+p)(x^2-qx+5)$
$= x^4+(-q-4)x^3+(5+4q+p)x^2+(-20-pq)x+5p$
$-q-4=-8 \Rightarrow q=4.$
$5+4q+p=24 \Rightarrow p=3$
則 $a=-20-pq=-32$
$b=5p=15$
$\Rightarrow (a,b)=(-32,15)$ #

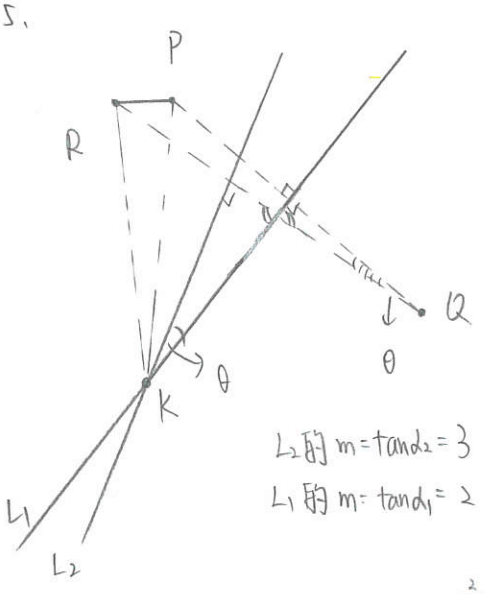
3. 令 $\log B = 3+p$
$\log A = 3+3p$ 且 $0 \le p < \frac{1}{3}$
$3\log B - \log A = 6 \Rightarrow \frac{B^3}{A} = 10^6 \Rightarrow A = (\frac{B}{100})^3$
$A, B \in \mathbb{N} \Rightarrow B = 100k$, $A = k^3$
$20^3 = 8000$, $22^3 = 10648$, $21^3 = 9261$
故A的Max=9261
($k_{max} = 21$)
故B的Max.=2100 #

4.
123、234、567、678
4.5同時排
一天3堂 → $C^8_3 - 4 - C^6_1 = 56-4-6 = 46$

一天4堂 → ✓ ✓ ___ ✓ ✓ ✗ ___ ___ ___ (4th, 5th)
3+1 $2\times3\times 2! = 12$
1+3或3+1
或
2+2 $C^4_2 C^4_2 - C^3_1 C^3_1 = 6\times6-3\times3=27$
選4 選5
39

一天5堂 → ✓ ✓ ___ ✓ ✓ ✗ ___ ___ ___ (4th, 5th)
3+2
$2\times C^3_2 \times 2! = 12$

共 $46+39+12 = 97$ 種 #

5.


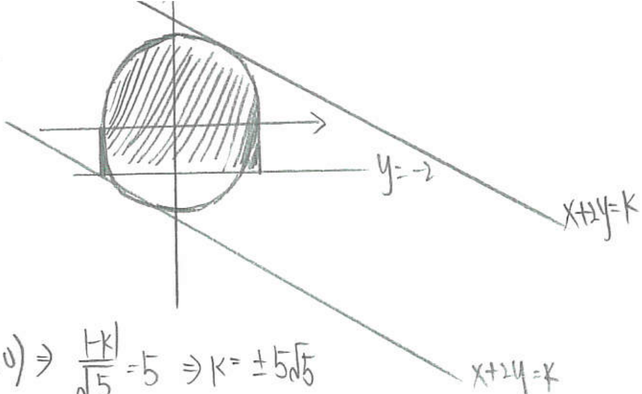
$\overline{KP} = \overline{KQ} = \overline{KR}$
⇒K為△PQR外心
設∠PKR=2θ ⇒ ∠PQR=θ
圓心角 圓周角
L_2的 $m=\tan\alpha_2=3$
L_1的 $m=\tan\alpha_1=2$
$\tan\theta = \frac{3-2}{1+6} = \frac{1}{7}$
$\tan\angle PKR = \tan 2\theta = \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{49}} = \frac{14}{49-1} = \frac{7}{24}$ #

6.

$-2 \le y \le \sqrt{25-x^2}$ 圓頂

$x^2+y^2=25$

$r=5$



切線 ⇒ 圓心(0,0) ⇒ $\frac{|-k|}{\sqrt5}=5$ ⇒ $k=\pm5\sqrt5$

取正

$M=5\sqrt5$ $m=x+2y\Big|_{x=-5,\,y=-2}=-9$

則 $(M,m)=(5\sqrt5,-9)$ #

7. 平行六面体体積，且已知 $-2\le d\le 2$

$(1,d,4)\times(2,-1,4)=(4d+4,4,-1-2d)$

↳ 觀察得知平行四邊形面積最大時，恰好為 $d=2$ 之時。

(平常要配方)

$\vec b\times\vec c$ 和 $\vec a$ 夾 90°

↓

$Max=\sqrt{10}\times\sqrt{(4d+4)^2+(4)^2+(-1-2d)^2}\Big|_{d=2}$

$=\sqrt{10}\times\sqrt{185}=5\sqrt{74}$ #

8. $w^k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $|2-w^k|^2=(2-\cos\frac{2k\pi}{7})^2+(\sin\frac{2k\pi}{7})^2$

$=5-4\cos\frac{2k\pi}{7}$

$\sum_{k=1}^{6}|2-w^k|^2=30-4(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7})$

$=30-8(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7})=30-8\times(-\frac12)=34$ #

*積化和差

$2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7})$

$=\cancel{\sin\frac{3\pi}{7}}+\sin(-\frac{\pi}{7})+\cancel{\sin\frac{5\pi}{7}}+\cancel{\sin(-\frac{3\pi}{7})}+\cancel{\sin(\frac{7\pi}{7})}\rightarrow 0+\cancel{\sin(-\frac{5\pi}{7})}$

$=-\sin\frac{\pi}{7}$ ⇒ $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac12$ #

9. $a_n=[1-(1-\frac1n)^4]+[1-(1-\frac2n)^4]$

$+\cdots+[1-(1-\frac{2n}{n})^4]$

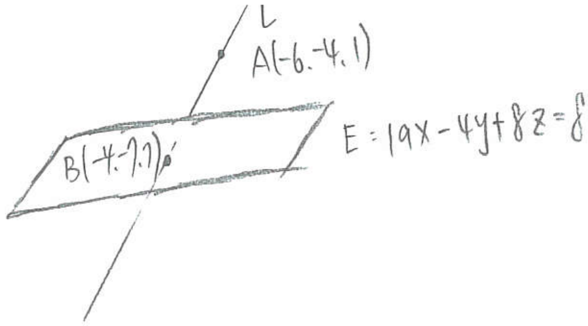
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\int_0^2[1-(1-x)^4]\,dx$

令 $y=x-1$, $dy=dx$ $x=0\Rightarrow y=-1$, $x=2\Rightarrow y=1$

$=\int_{-1}^{1}[1-y^4]\,dy=(y-\frac15y^5)\Big|_{-1}^{1}$

$=(1-\frac15)-(-1+\frac15)=\frac45-(-\frac45)=\frac85$ #

10.



設 $B(-6+2t,-4-3t,1+6t)\in E$ 代入得 $t=1$

⇒ $B(-4,-7,7)$, $\overline{AB}=7$, $\overline{AC}=7$

△最大時 ⇒ $\angle A=90^\circ$ ⇒ $\overline{BC}=7\sqrt2$

→ 過A作垂直L平面：$2x-3y+6z=6$

交E於直線M，其方向向量

為 $(2,-3,6)\times(19,-4,8)\parallel(0,2,1)$

找共同点 $(0,0,1)$

⇒ C 設為 $(0,2t,1+t)$, $\overline{BC}=7\sqrt2$ ⇒ $t=-3$ or $\frac{-1}{5}$

故 C為 $(0,-6,-2)$ 或 $(0,-\frac25,\frac45)$ #

二、計算

1. $f'(x)=0$ 時有兩根 $x=1, 5$

$\Rightarrow f'(x)=a(x-1)(x-5)$

切線方程式 $\Rightarrow y-f(3)=4(x-3)$

在 $(3, f(3))$ 時切線斜率 $=4$

$\Rightarrow f'(3)=4=a(2)(-2) \Rightarrow a=-1$

所求 $\int_0^2 f'(x)\,dx=\int_0^2 -(x-1)(x-5)\,dx$

$=-\frac{2}{3}$ #

2.

(1) $S_n=\dfrac{(4^n-1)a_n}{3\times 4^{n-1}}$, $S_{n-1}=\dfrac{(4^{n-1}-1)a_{n-1}}{3\times 4^{n-2}}$

$S_n-S_{n-1}=a_n=\dfrac{(4^n-1)a_n-(4^n-4)a_{n-1}}{3\times 4^{n-1}}$

化簡得 $a_n=4a_{n-1}$ (等比數列)

$a_1=\frac{4}{3}$, $r=4$, $S_n=\dfrac{\frac{4}{3}(4^n-1)}{3}$

$=\frac{4}{9}(4^n-1)$ #

(2) $a_n=\frac{4}{3}\times 4^{n-1}$, $b_n=\frac{n}{4^n}$

$S=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n}{4^n}$

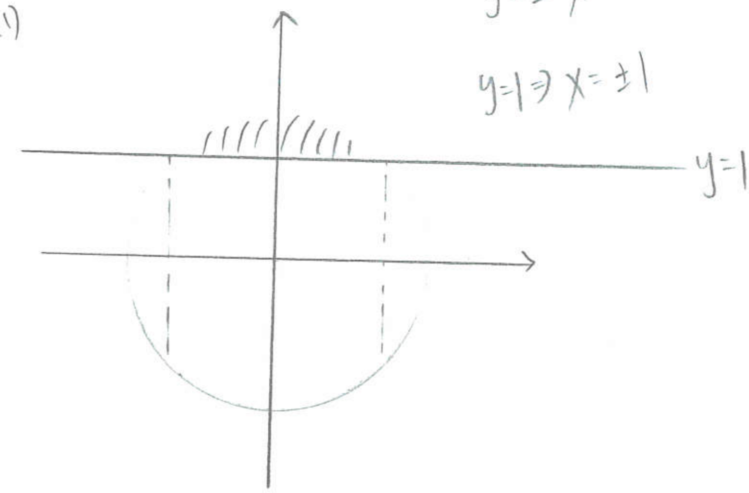
$\frac{1}{4}S=\quad\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{(n-1)}{4^n}+\frac{n}{4^{n+1}}$

$\frac{3}{4}S=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\underbrace{\frac{n}{4^{n+1}}}_{0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}T_n=\frac{4}{3}\times\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$ #

3. (1)

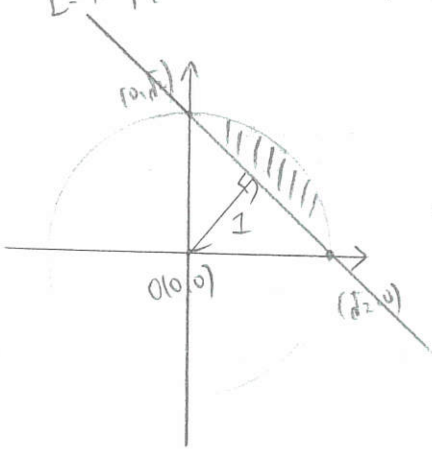
$y^2=2-x^2$

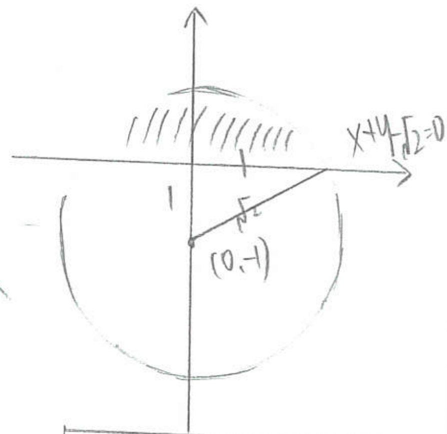
$y=1 \Rightarrow x=\pm 1$



$\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)\,dx-1^2\pi\times 2=\frac{4\pi}{3}$ #

(2) $L: x+y-\sqrt{2}=0$ $\quad d(O;L)=\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=1$





$x^2+(y+1)^2=2$

$\Rightarrow y+1=\sqrt{2-x^2}$, $y=\sqrt{2-x^2}-1$

$y^2=(2-x^2)+1-2\sqrt{2-x^2}$

$=3-x^2-2\sqrt{2-x^2}$

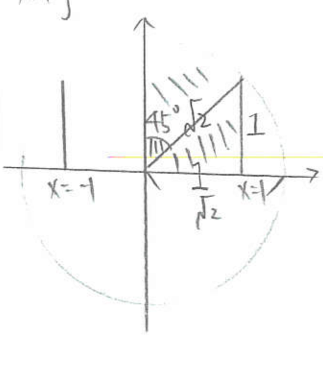
所求 $=\int_{-1}^{1}\pi\cdot(3-x^2-2\sqrt{2-x^2})\,dx$

$=\pi\cdot(3x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1}-2\pi\times\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx$

$\times \int_{-1}^{1}\underbrace{\sqrt{2-x^2}}_{y}\,dx=2\times\left(1^2\times\frac{1}{2}+\sqrt{2}^2\times\frac{45°}{360°}\pi\right)$

$=1+\frac{1}{2}\pi$

$x^2+y^2=2$



故解為 $\frac{16}{3}\pi-2\pi\left(1+\frac{1}{2}\pi\right)$

$=\frac{10}{3}\pi-\pi^2$ #

4.

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1}\right) C^n_k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,(k+1)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C^{n+1}_{k+1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\downarrow$$

$$C^{n+1}_1 p^0 (1-p)^n + C^{n+1}_2 p (1-p)^{n-1} + \cdots + C^{n+1}_{n+1} p^n (1-p)^0$$

而 $[p+(1-p)]^{n+1} = C^{n+1}_0 p^0 (1-p)^{n+1} + C^{n+1}_1 p^1 (1-p)^n + C^{n+1}_2 p^2 (1-p)^{n-1} + \cdots + C^{n+1}_{n+1} p^{n+1} (1-p)^0$

故 $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1}{n+1} \times \left[1 - C^{n+1}_0 p^0 (1-p)^{n+1}\right] \times \frac{1}{p}$

$$= \frac{1}{(n+1)p} \times \left(1-(1-p)^{n+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p} \quad \#$$

5.

(I) B~E 只用1色 : $\underset{A}{4} \times \underset{定顏色}{3} \times 1^2 \times \underset{四角落}{3^4} = 972$

(II) B~E 用2色 :

2同2同 : (a) BD / CE ⇒ $\underset{A}{4} \times \underset{定顏色}{3 \times 1} \times \underset{BD同色}{2} \times 1 \times 2^4 = 384$

(b) BC / DE ⇒ $4 \times 3 \times 2 \times 3^2 \times 2^2 = 864$

BE / CD 同上 : 864

3同1異 : $4 \times 3 \times 2 \times 3^2 \times 2^2 \times \underset{選1異}{C^4_1} = 3456$

(III) B~E用3色 :

2同2異 : BD同 (CE同) : $4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2^4 \times 2 = 768$

BC同 (BE同) (CD同) (DE同) : $4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2^2 \times 2 \times 4 = 2304$

G	C	H
B	A	D
F	E	I

先選A ⇒ 討論 B.C.D.E

方法數

→ 972 + 384 + 864 + 864 + 3456 + 768 + 2304

= 9612 #