54/80 60 mins

國立臺中文華高級中學 101 學年度第一次教師甄選
數學科試題本

測驗說明:
本試卷分三部份，前二部分為填充題，不需計算過程，但答案中若有分式需化至最簡，根式需有理化，否則不予計分；第三部分為計算證明題，需詳列計算過程或說明理由，否則不予計分。

填充題：(第一部份，每格 4 分)

1. 設兩圖形 $\Gamma: \frac{(x-1)^2}{n^2}+y^2 \le 1$，$\Gamma': (x+3)^2+\frac{(y+2)^2}{n^2} \le 1$（其中 $n \ge 10$），其相交部份的面積為 a_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

2. 設 a 為實數，且 $x^2+ax+(8-a)=0$ 的兩根都大於 3，則 a 的範圍為＿＿＿＿＿＿。

3. 考慮滿足 $a^2+b^2=49$ ，$c^2+d^2-16c-12d=-96$ 的所有實數 a，b，c，d ，求 $\sqrt[3]{16c+12d-2ac-2bd-47}$ 的最小值為＿＿＿＿＿＿ 。

4. 設 n 為一個 101 位數的正整數，且能被 9 整除。令 n 的所有位數之和為 a ，a 的所有位數之和為 b ，則 b 的所有可能值之和為＿＿＿＿＿＿ 。

5. 試求 $\int_1^2 (x^3-5x^2+x-6)(x-1)^3dx$ 的值。

6. 一個實係數三次多項式函數通過（101，2012）、(99，2008)、(102，2005)、(103，2016) 四點，求此函數的切線中，斜率最小的切線所在的直線方程式為＿＿＿＿＿＿ 。

7. 將一列 n 個（$n \ge 2$）的小方格中最左邊的黑棋向右移動，每次移動 1 或 2 格，直至最右邊的小方格為止。假設由最左移至最右有 a_n 種移動方法，每種移動方法的機會均等，「移動次數」的期望值為 E_n ，求數對(a_7 ，E_7)為＿＿＿＿＿＿ 。

●	○	○	○	○	○	○

8. ΔABC 中， $A(2,-4)$ ，若 $\angle B$ 、$\angle C$ 之角平分線分別為 L_1 : $x+y-2=0$ 及 L_2 : $x-3y-6=0$ ，則 $\overleftrightarrow{BC}$ 之方程式為＿＿＿＿＿ 。

填充題：(第二部份，每格 6 分)

9. 有一組正整數 a_2 ，a_3 ，a_4 ，a_5 ，a_6 ，a_7 使得 $\frac{4}{7}=\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\frac{a_4}{4!}+\frac{a_5}{5!}+\frac{a_6}{6!}+\frac{a_7}{7!}$ ，其中 $0 \le a_i < i$ $(i=2,3,4,5,6,7)$，求數對(a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7) =＿＿＿＿＿ 。

送分

10. 設甲、乙兩袋中，甲袋有 1 白球 1 黑球，乙袋有 1 白球，從甲袋隨機取 1 球放入乙袋後，再從乙袋隨機取 1 球放回甲袋，完成這樣的動作稱為一局，試求 n 局後甲袋有 1 白球 1 黑球的機率為__________。 （答案請以 n 表示）

11. 實數 a,b 滿足 $(a+bi)^{101}=a-bi$ (其中 $i=\sqrt{-1}$)，則數對 (a,b) 有______組解。

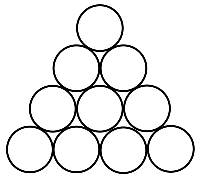
12. y＝[x]表高斯函數，求 $\sum_{k=1}^{40}[10^{\frac{k}{40}}]=$__________。

13. 將十次多項式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)$ 展開後得 $x^{10}+55x^9+a_8x^8+a_7x^7+\cdots+10!$，若 $a_8=55M$ ，$a_7=55^2N$，其中 M、N 為正整數，求數對(M，N)＝__________。

14. 空間中，四面體 A-BCD，$\overline{AB}=\overline{CD}=6$ ，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=5$ ，$\overline{BD}=7$，求四面體 A-BCD 的體積為__________。

15. 四邊形 ABCD，$\overline{AB}=14$ 、$\overline{BC}=9$ 、$\overline{CD}=7$ 、$\overline{DA}=12$ ，求四邊形 ABCD 的所有內切圓中，面積最大者為__________。

16. 用 5 種不同顏色塗右圖的 10 個固定不動的圓形區域，且相鄰區域須塗不同色，則共有__________種塗法。



101 文華高中 54/80 沒印到計算，補在最後面.

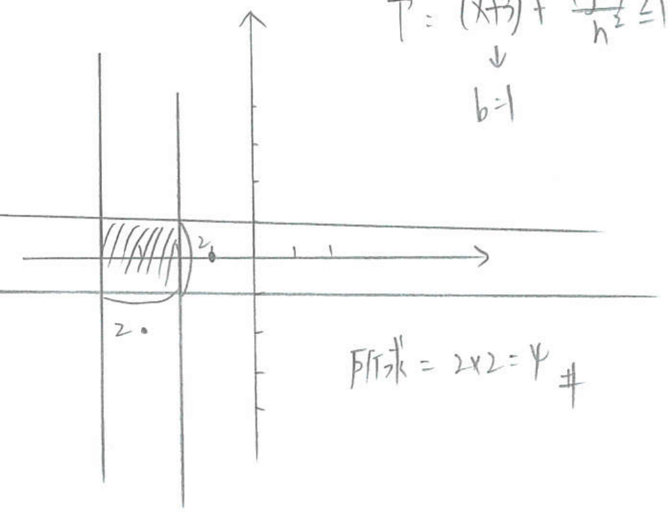
一、填充

1. $n \to \infty \Rightarrow$ 拉成長方形 $\Gamma: \frac{(x-1)^2}{n^2} + y^2 \le 1$ …左右型

$b = 1$

$\Gamma': (x+3)^2 + \frac{(y+2)^2}{n^2} \le 1$ …上下型

$b = 1$



所求 $= 2 \times 2 = 4$ #

2. $\begin{cases} \alpha+\beta = -a \\ \alpha\beta = 8-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha-3)+(\beta-3) > 0 & \cdots (1) \\ (\alpha-3)(\beta-3) > 0 & \cdots (2) \\ D \ge 0 & \cdots (3) \end{cases}$

$(1) \to a < -6$ $(2) \to a > -\frac{17}{2}$

$(3) \to a^2 - (8-a) \cdot 4 \ge 0 \Rightarrow a \le -8$ 或 $a \ge 4$

取交集得 $-\frac{17}{2} < a \le -8$ #

3. focus on $-47 = 49 - 96$

$\cancel{16}c + \cancel{12}d - 2ac - 2bd + (a^2+b^2) + (c^2+d^2 - \cancel{16}c - \cancel{12}d)$

$= (a-c)^2 + (b-d)^2$

(a,b)在 $M_1(0,0)$ $r_1 = 7$ 的圓，(c,d)在 $M_2 = (8,6)$ $r_2 = 2$ 的圓

$\min = \overline{M_1M_2} - (7+2) = 10 - 9 = 1$

所求 $= \sqrt[3]{1} = 1$ #

4. $\underbrace{a_1 + \cdots + a_{101}}_{\max = 909 \to 18} = 9k$ a

故 b 的可能值 9 或 18 $\Rightarrow$ 27 #

5. 令 $y = x-1$，$dy = dx$，$x = y+1$

$(x^3 - 5x^2 + x - 6) \div (x-1) = (x-1)^2 \cdots (-2x^2 - 2x - 5)$

$(x^3 - 5x^2 + x - 6) = y^3 + (-2x^2 - 2x - 5)$

$= y^3 - 2(y+1)^2 - 2(y+1) - 5$

$= y^3 - 2y^2 - 6y - 9$

$\int_0^1 (y^3 - 2y^2 - 6y - 9)\, y^3\, dy$

$= \left(\frac{1}{7}y^7 - \frac{1}{3}y^6 - \frac{6}{5}y^5 - \frac{9}{4}y^4\right)\Big|_0^1 = \frac{-1529}{420}$ #

6. 平移 $x \to -100$，$y \to 2000$

新四點：$(1,12)$，$(-1,8)$，$(2,15)$，$(3,16)$

$f(x) = a(x-1)(x+1)(x-2) + b(x-1)(x+1) + c(x-1) + 12$

代入解得 $a = 3$，$b = -3$，$c = 2$

$\Rightarrow f(x) = 3x^3 - 9x^2 - x + 19$

$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 18x - 1 = 9(x-1)^2 - 10$ 當 $x = 1$ 時

有最小切線斜率 $= -10$

$(1,12) \to (101, 2012)$，m 不變（平移）

所求：$y - 2012 = -10(x - 101) \Rightarrow y = -10x + 3022$

#

7.

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_2 = 1$、$a_3 = 2$ (1+1 或 2)

$\Rightarrow a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13$ #

$x+2y=6$

x	0	2	4	6
y	3	2	1	0
	↓	↓	↓	↓
移动次数	3	4	5	6
走法	1	$\frac{4!}{2!2!} = 6$	$\frac{5!}{4!} = 5$	1

相加 $a_7 = 13$ (合理)

$\Rightarrow E_7 = 3\times\frac{1}{13} + 4\times\frac{6}{13} + 5\times\frac{5}{13} + 6\times\frac{1}{13}$

$= \frac{58}{13}$ #

---

7. $A(2,-4)$ 对 $L_1: x+y-2=0$

作对称点 $A': \left(2-2\cdot1\cdot\frac{-4}{2}, -4-2\cdot1\cdot\frac{-4}{2}\right)$

$= (6,0)$

$A(2,-4)$ 对 $L_2: x-3y-6=0$

作对称点 $A'': \left(2-2\cdot1\cdot\frac{8}{10}, -4-2\cdot(-3)\cdot\frac{8}{10}\right)$

$= \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$\overline{A'A''}$ eq $= \overline{BC}$ eq $\Rightarrow x+7y-6=0$ #

二、填充

9. 送分

10、甲的转移矩阵 A

$$\begin{array}{c} \\ 1w/B \\ 2w \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1w/B & 2w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$ 些 A $\Rightarrow$ A 的 eigenvalue

$\lambda = 1$ 或 $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow a_n = P\times1^n + Q\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{4} \\ a_2 = \frac{11}{16} \end{cases}$

$a_1 = P + \frac{1}{4}Q = \frac{3}{4}$

$a_2 = P + \frac{1}{16}Q = \frac{11}{16}$ $\Rightarrow (P,Q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

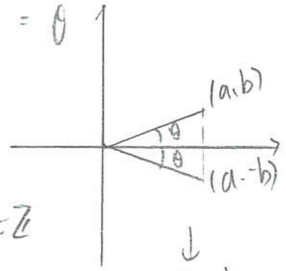
得所求 $a_n = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$ #

---

11. 長度=1 設主幅角 $=\theta$

$\Rightarrow 101\theta = -\theta$

$\Rightarrow 102\theta = 0 + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$



↓

$a^2+b^2 \neq 0$

(不全是0的case)

$0 \le \theta = \frac{2k\pi}{102} < 2\pi$

$0 \le \frac{k\pi}{102} < \pi$ $\Rightarrow k = 0 \sim 101$ $\Rightarrow$ 102 組解

考慮 $a=0, b=0$ $\Rightarrow$ 1 組解，故共 103 組解 #

12.

$10^{0.3010}=2 \rightarrow 0.3010\times 40=12.\cdots$

$10^{0.4771}=3 \rightarrow 0.4771\times 40=19.\cdots$

$10^{0.6020}=4 \rightarrow 0.6020\times 40=24.\cdots$

$10^{0.6990}=5 \rightarrow 0.6990\times 40=27.\cdots$

$10^{0.7781}=6 \rightarrow 0.7781\times 40=31.\cdots$

$10^{0.8451}=7 \rightarrow 0.8451\times 40=33.\cdots$

$10^{0.9030}=8 \rightarrow 0.9030\times 40=36.\cdots$

$10^{0.9542}=9 \rightarrow 0.9542\times 40=38.\cdots$

$10^{1}=10 \rightarrow 1\times 40=40$

$K=1\sim 12 \rightarrow ①$

$K=13\sim 19 \rightarrow ②$

$K=20\sim 24 \rightarrow ③$

$K=25\sim 27 \rightarrow ④$

$K=28\sim 31 \rightarrow ⑤$

$K=32\sim 33 \rightarrow ⑥$

$K=34\sim 36 \rightarrow ⑦$

$K=37\sim 38 \rightarrow ⑧$

$K=39 \rightarrow ⑨$

$K=40 \rightarrow 10$

故和為 $12\times 1+7\times 2+\cdots$

$=141$ #

13. a_8= 相異兩數互乘總和

$=\frac{1}{2}\times\left[(1+2+3+\cdots+10)(1+2+3+\cdots+10)-(1^2+2^2+\cdots+10^2)\right]$

↓

括號內會算到 $\underbrace{1\times 2,\ 2\times 1}$, $\underbrace{2\times 3,\ 3\times 2}$, $\cdots$ etc.

$a_8=\frac{1}{2}\times\left[55^2-7\times 55\right]=55\left[\frac{55-7}{2}\right]=55\times\underbrace{24}_{M}$

而 $a_7=\frac{1}{3}\left[a_8(1+2+\cdots+10)-1^2(55-1)-2^2(55-2)-\cdots\right]$

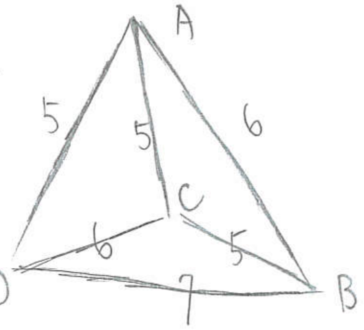
$=\frac{1}{3}\left[24\times 55^2-55(1^2+2^2+\cdots+10^2)+(1^3+2^3+\cdots+10^3)\right]$

$=\frac{1}{3}\left[24\times 55^2-7\times 55^2+55^2\right]$

$=55^2\times\left[8-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}\right]=55^2\times\underbrace{6}_{N}$

$(M,N)=(24,6)$ #

14.



$C(0,0,0)$

$D(6,0,0)$

令 $A(3,0,4)$

△ACD定為xz平面

$B(x,y,z)$

$\Rightarrow\begin{cases}(x-3)^2+y^2+(z-4)^2=36\\ x^2+y^2+z^2=25\\ (x-6)^2+y^2+z^2=49\end{cases}$

解得 $x=1, z=1, y=\sqrt{23}$ (by graph)

↓

到xz平面距離

(高)

$V=\frac{6\times 4}{2}\times\sqrt{23}\times\frac{1}{4}=3\sqrt{23}$

#

15、任意四邊形面積公式 $=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cdot\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)}$

$\text{Max} \Rightarrow \frac{B+D}{2}=90^\circ \Rightarrow B+D=180^\circ$ (圓內接四邊形)

$\Rightarrow$ 此時面積 $= rs = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

r：四邊形的內切圓半徑

$s=\frac{14+9+7+12}{2}=21 \Rightarrow 21r=42\sqrt{6} \Rightarrow r=2\sqrt{6}$

$\pi r^2 = 24\pi$ #

16. 先塗正中間 → 六環 → 三角落

$5 \times \left[(4-1)^6+(-1)^6(4-1)\right] \times 3^3 = 5\times(732)\times 27 = 98820$ #

二、填充9

$\frac{4}{7}=\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\frac{a_4}{4!}+\frac{a_5}{5!}+\frac{a_6}{6!}+\frac{a_7}{7!}$

例. 同乘7! $\Rightarrow 2880 = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot a_2$

$+\,7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot a_3$

$+\,7\cdot6\cdot5\cdot a_4$

$+\,7\cdot6\cdot a_5$

$+\,7\cdot a_6$

$+\,a_7$

連除的概念

$2880\div7=411\cdots3 \rightarrow a_7$

$411\div6=68\cdots3 \rightarrow a_6$

$68\div5=13\cdots3 \rightarrow a_5$

$13\div4=3\cdots1 \rightarrow a_4$

$3\div3=1\cdots0 \rightarrow a_3$

$1\div2=0\cdots1 \rightarrow a_2$

故 $(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$

$=(1, 0, 1, 3, 3, 3)$

↓

原題寫正整數、故送分

三計算

1. 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq I_2$，若 $A^3=I_3$，證明 $a+d=-1$ (6分)

$\det(A^3)=(\det A)^3=\det(I_3)=1 \Rightarrow \det A=1$ (A^{-1} exist)

$\Rightarrow A^2=A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$b(a+d)=-b \Rightarrow b(a+d+1)=0$

$c(a+d)=-c \Rightarrow c(a+d+1)=0$

$\Rightarrow$ 證 $b\neq0$ 且 $c\neq0$

若 $b=c=0 \Rightarrow a^2=d,\ d^2=a$ (皆正) $\Rightarrow a=d=0$ 或 $a=d=1$

$\downarrow$ $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

皆不合

$b=0$ 或 $c=0 \Rightarrow a^2=d,\ d^2=a \Rightarrow a=d=0$ 或 $a=d=1$

$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^3\neq I_3$　$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^3\neq I_3$

皆不合

故 $b\neq0$ 且 $c\neq0$，得 $a+d=-1$ #

2. $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，若 a_n、$f(1)$、$f(0)$ 均為奇數，試證：$f(x)=0$ 沒有有理根 整數 (6分)

設 $f(x)=0$ 有一有理根 $x=\frac{q}{p}$，$(p,q)=1$、$p,q\in\mathbb{Z}$

$p\mid a_n$ 且 $q\mid a_0 \Rightarrow$ 因 a_n、$f(0)=a_0$ 均為奇數

故 p、q 為奇數 $\Rightarrow p-q$ 為偶數

$f(x)=(px-q)Q(x) \Rightarrow f(1)=(p-q)Q(1)$ 為奇數

$\Rightarrow p-q$ 為奇數 $(*)$

得 $f(x)=0$ 沒有有理根 #

3. 若 $p,q\in\mathbb{N}$，且 $p^2+5pq+q^2=7^{101}$，求 q 的所有可能解？(8分)

看成 p 的二次式

$\Rightarrow p^2+(5q)\cdot p+(q^2-7^{101})=0$

$D=(5q)^2-4\cdot(q^2-7^{101})$

$=25q^2-4q^2+4\cdot7^{101}=7(3q^2+4\cdot7^{100})$

$\Rightarrow$ 因 $p\in\mathbb{N}$，故 D 為完全平方數

(根號才開得出來)

$\Rightarrow q$ 為 7 的倍數，且 p 為 7 的倍數

令 $q=7q_1$，$p=7p_1$

代入原式，$p_1^2+5p_1q_1+q_1^2=7^{99}$ (一次降 2 次方)

$\Rightarrow P^2+5PQ+Q^2=7$ (降了 50 次)

$P,Q\in\mathbb{N}$

$(P+Q)^2+3PQ=7$

討論得 $P=Q=1$ (或直接看)

$q=7^{50}$ #