67/100 60 mins.

國立竹北高中 105 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選數學科試題

壹：填充題(必需填寫在答案欄，共 12 題，每題 5 分，共 60 分)

1.設複數平面上的相異四點 z_1，z_2，z_3，z_4 依序且依順時針方向可連成一個正方形。

則 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ 之值為__________ 。

2.設 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{3q}=12$，其中 p，q 為正數，則 $3\log_{\frac{1}{3}}p+\log_{\frac{1}{3}}q$ 的最大值為__________ 。

3.$\sqrt{(x-1)^2+(2^x-4)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(2^x)^2}$ 之最小值為______ 。

4.有一個四面體 $OABC$，它的一個底面 ABC 是邊長為 4 的正三角形，且知

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$ ；如果直線 OA 與直線 BC 間的公垂線段長 (亦即此兩直線間的

距離)是 $\sqrt{3}$，則 $a=$______ (以最簡分數表示)。

5.設多項式 $(x-1)^{20}$ 除以 x^2+1 的餘式為 $px+r$，其中 p、r 都是實數，

則數對 $(p, r)=$________________ 。

6.ΔABC 中，$\overline{AB}=5, \overline{AC}=3$，過 A 點作直線 BC 的垂直線，設垂足為 H，

若 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$，則 ΔABC 的外接圓面積為________________ 。

7.若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，而 $\cot\dfrac{\alpha}{2}$ ，$\cot\dfrac{\beta}{2}$ ，$\cot\dfrac{\gamma}{2}$ 成等差數列，則 $\cot\dfrac{\alpha}{2}\times\cot\dfrac{\gamma}{2}=$______ 。

8.若橢圓二焦點為 $F_1(\sqrt{5},0)$，$F_2(-\sqrt{5},0)$，切線 L 為 $x+y=5$，求此橢圓方程式為________ 。

9.不等式 $\sqrt{\log_2 x-1}+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$ 的解是__________ 。

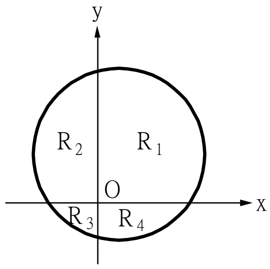
10.設曲線 C：$y^2=ax$，直線 L：$py=x\,(a>0，p>0)$，若 C 與 L 所圍的圖形繞 x 軸旋轉，

求此旋轉體的體積為__________ 。

11.設m為實數。若圓$x^2+y^2-4x-7y+10=0$與直線$y=m(x-3)$在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的m之最大範圍為__________。

12.在坐標平面上有一個圓，其圓心坐標為(5 , 12)且半徑為 20，若此圓分布在第一、二、三、四象限內的區域面積分別為R_1、R_2、R_3、R_4（如附圖所示），

則$R_1-R_2+R_3-R_4$之值＝________。



貳：非選擇題(需寫出計算過程，共 5 題，共 40 分)

注意：需按照題號依次作答，計算題目需列出計算過程，否則不計分。

1. 一項調查想了解新竹地區高中生擁有手機的學生比例，民調公司想在 99.7%的信心水準下，抽樣誤差為±3%，試問這次民調至少需要多少成功的樣本？**(6 分)**

2. 設$x^5-1=0$的 5 個根在複數平面上對應到A,B,C,D,E五個點，

試求$\overline{AB}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\overline{AE}$。**(6 分)**

3.若對任意實數x，$f(x)=x^4-4p^3x+12$恆正，則p值的範圍為？**(6 分)**

4.設無窮數列$\langle a_n\rangle$符合$a_0=0$且當$n\geq1$時，a_n滿足$a_n-a_{n-1}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n, & \text{當}n\text{為偶數}\\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & \text{當}n\text{為奇數}\end{cases}$

(1)求$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$的值。**(5分)**

(2)證明:當$n\geq0$時$a_{2n+2}-a_{2n}<0$。**(5分)**並依此說明對於所有正整數n，不等式$-\dfrac{1}{8}\leq a_{2n}<0$恆成立。**(2分)**

5. (1)設n，k都是正整數且$n\geq k\geq2$，試證明$C_k^n=C_k^{n-2}+2C_{k-1}^{n-2}+C_{k-2}^{n-2}$。**(5 分)**

(2)設計一個情境式的敘述說明$C_k^n=C_k^{n-2}+2C_{k-1}^{n-2}+C_{k-2}^{n-2}$。**(5 分)**

105 竹北高中　67/100　60mins.

一、填充

1. $|z_2-z_1|=\sqrt2 r$, $|z_3-z_1|=2r$

而 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 和 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 主幅角差45°

所求為 $\frac{1}{\sqrt2}(\cos45°+i\sin45°)=\frac12+\frac12 i$ #

2. $\frac3p+\frac1q=36$, $3\log_{\frac13}p+\log_{\frac13}q=\log_3\frac{1}{p^3q}\le\log_3 9^4$

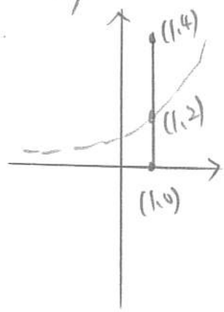
$=\log_3 3^8$

$=8$ #

$\Rightarrow \frac{\frac1p+\frac1p+\frac1p+\frac1q}{4}\ge\sqrt[4]{\frac{1}{p^3q}}$

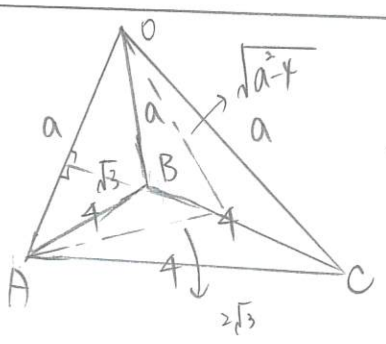
$9^4\ge\frac{1}{p^3q}$

3. 看成 $(x,2^x)$ 和 $(1,4)$、$(1,0)$ 的距離和.



$\Rightarrow$ Min. $=4$ #

4.



$\Rightarrow\sqrt{a^2-4-3}+\sqrt{12-3}=a$

$\Rightarrow\sqrt{a^2-7}+3=a\Rightarrow a^2-7=a^2-6a+9\Rightarrow a=\frac83$ #

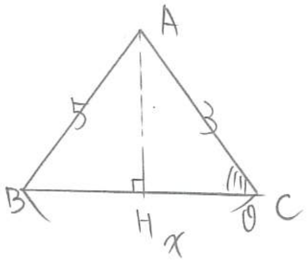
5. $(x-1)^{20}=(x^2+1)Q(x)+(px+r)$

$x=i\Rightarrow(i-1)^{20}=-1024=0+pi+r$

$x=-i\Rightarrow(i+1)^{20}=-1024=0+(-ip)+r$

$\Rightarrow r=-1024$, $p=0$ $\Rightarrow(p,r)=(0,-1024)$ #

6. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac32\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$



$3\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{BC}\cdot(3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$

$\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC})=0$

$\Rightarrow x^2+6x\cos\theta=0$

而原△代餘弦 $\Rightarrow 25=x^2+9-6x\cos\theta\Rightarrow x^2-6x\cos\theta=16$

解得 $2x^2=16$, $x=2\sqrt2\Rightarrow 25=8+9-12\sqrt2\cos\theta$

得 $\cos\theta=-\frac{\sqrt2}{3}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt7}{3}$

則 $\frac{5}{\sin\theta}=2R\Rightarrow\frac{5}{\frac{\sqrt7}{3}}=\frac{15}{\sqrt7}=2R\Rightarrow R=\frac{15}{2\sqrt7}$

外接圓面積 $=\frac{225\pi}{28}$ #

7. $\alpha+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\frac\alpha2+\frac\beta2+\frac\gamma2=90°$

$\frac\alpha2=90°-\left(\frac\beta2+\frac\gamma2\right)\Rightarrow\cot\left(\frac\alpha2\right)=\tan\left(\frac\beta2+\frac\gamma2\right)$

$=\dfrac{\frac{1}{\cot\frac\beta2}+\frac{1}{\cot\frac\gamma2}}{1-\frac{1}{\cot\frac\beta2\cot\frac\gamma2}}$

$\Rightarrow\frac{\cot\left(\frac\alpha2\right)}{1}=\frac{\cot\frac\beta2+\cot\frac\gamma2}{\cot\frac\beta2\cot\frac\gamma2-1}=\frac{\cot\frac\alpha2+\cot\frac\beta2+\cot\frac\gamma2}{\cot\frac\beta2\cot\frac\gamma2}$

$\Rightarrow\cot\left(\frac\alpha2\right)\cot\frac\beta2\cot\frac\gamma2=\underbrace{\cot\frac\alpha2+\cot\frac\beta2+\cot\frac\gamma2}$

$=3\cot\frac\beta2$

$\Rightarrow\cot\frac\alpha2\times\cot\frac\gamma2=3$ #

8. $F_1(\sqrt5,0)$ 對 $L:x+y-5=0$ 作對稱點 $F_1'(5,5-\sqrt5)$

而 $\overline{F_1'F_2}=2a=2\sqrt{15}\Rightarrow a=\sqrt{15}$, $c=\sqrt5\Rightarrow b=\sqrt{10}$

中心為 $\overline{F_1F_2}$ 中心 $(0,0)\Rightarrow$ eq: $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$ #

9. 令 $t=\sqrt{\log_2 x-1}\ge 0$

$t^2+1=\log_2 x$

原式 $=t+\frac{1}{2}(-3\log_2 x)+2$

$=t-\frac{3}{2}(t^2+1)+2=-\frac{3}{2}t^2+t+\frac{1}{2}>0$

$\Rightarrow 3t^2-2t-1<0$ $\quad \begin{matrix} t & & -1 \\ 3t & \times & +1 \end{matrix}$

$(t-1)(3t+1)<0 \Rightarrow -\frac{1}{3}<t<1$ 但因 $t\ge 0$

$\Rightarrow 0\le t<1 \Rightarrow 1\le \log_2 x<2 \Rightarrow 2^1\le x<2^2$

$\Rightarrow 2\le x<4$ #

10. $y=\sqrt{ax} \Rightarrow \sqrt{ax}=\frac{1}{p}x \Rightarrow ax=\frac{1}{p^2}x^2$

$\Rightarrow x\left(\frac{x}{p^2}-a\right)=0$, $x=0$ 或 ap^2

$V=\left|\pi\int_0^{ap^2}\left[\left(\frac{1}{p}x\right)^2-(\sqrt{ax})^2\right]dx\right|$

$=\left|\pi\cdot\left(\frac{1}{3p^2}x^3\Big|_0^{ap^2}-\frac{a}{2}x^2\Big|_0^{ap^2}\right)\right|$

$=\left|\pi\cdot\left(\frac{a^3p^6}{3p^2}-\frac{a^3p^4}{2}\right)\right|$

$=\left|\pi\cdot\left(\frac{2a^3p^6-3a^3p^6}{6p^2}\right)=\pi\cdot\frac{-a^3p^6}{6p^2}\right|$

$=\pi\cdot\frac{a^3p^4}{6}$ #

11. $(x-2)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{25}{4}$, $x=0 \Rightarrow y=\begin{cases}2\\5\end{cases}$

$(0,2)$ 和 $(3,0)$ $m=-\frac{2}{3}$

$(0,5)$ 和 $(3,0)$ $m=\frac{5}{-3}$ $\Rightarrow -\frac{5}{3}<m<-\frac{2}{3}$ #

12. $10\times 24=240$ #

二、非選.

1. $99.7\% \Rightarrow e=3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$95\% \to 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$68\% \to \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$e=3\times\sqrt{\frac{-p^2+p}{n}}=3\times\sqrt{\frac{-(p^2-p+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})}{n}}\le 3\times\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{n}}=\frac{3}{2}\times\sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{3}{100}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{1}{50} \Rightarrow \frac{1}{n}=\frac{1}{2500}$, $n=2500$ (樣本) #
(min.)

2. $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$\downarrow$

$(x-w)(x-w^2)(x-w^3)(x-w^4)$

題求 $(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)=1^4+1^3+1^2+1+1=5$ #

3. $f'(x)=4x^3-4p^3 \overset{\text{let}}{=} 0$ $\quad x=p$

$f(p)=p^4-4p^4+12>0 \Rightarrow p^4<4$, $(p^4-4)<0$

$\Rightarrow (p^2+2)(p^2-2)<0 \Rightarrow -\sqrt{2}<p<\sqrt{2}$ #

4. (1) $a_{2n}-a_{2n-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}$

$+\ a_{2n-1}-a_{2n-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$ ↓跳兩項

$+$ $\vdots$

$+$

$\vdots$

$+\ a_1-a_0=\left(\frac{1}{5}\right)^1-\left(\frac{1}{3}\right)^1$

$a_{2n}-0=\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{5}^2+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}\right]-\left[\frac{1}{3}^1+\frac{1}{3}^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}\right]$

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\left(\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right)-\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right)$

$=\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{8}$ #

4. (2) $a_{2n+2}-a_{2n+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}$

$$+\ a_{2n+1}-a_{2n}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

$$a_{2n+2}-a_{2n}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}\times\left(1+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{6}{5}\times\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{3^{2n+1}}$$

$$=\frac{\frac{6}{5}\times 3^{2n+1}-5^{2n+1}}{15^{2n+1}}$$

focus 分子: $\frac{6}{5}3^{2n+1}-5^{2n+1}<3^{2n+1}-5^{2n+1}<0$, as $n\geq 0$

Hence, $a_{2n+2}-a_{2n}<0$ as $n\geq 0$

It means that $\langle a_n\rangle$ is decrease,

$\Rightarrow a_{2n}<a_0=0$ & $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=-\frac{1}{8}$

$\Rightarrow -\frac{1}{8}\leq a_{2n}<0$ #

5. (1) $C_k^n=C_k^{n-2}+2C_{k-1}^{n-2}+C_{k-2}^{n-2}$

RHS: $\underbrace{C_k^{n-2}+C_{k-1}^{n-2}}+\underbrace{C_{k-1}^{n-2}+C_{k-2}^{n-2}}$ (兩次巴斯卡)

$=C_k^{n-1}+C_{k-1}^{n-1}$

$=C_k^n=$ LHS, Hence, we get the proof.

5. (2)

從n人中選出k個隊長

n人中 $\begin{cases}2人:甲,乙\\(n-2)人\end{cases}$

C_k^{n-2}: 甲,乙沒被選中

$2C_{k-1}^{n-2}=C_1^2C_{k-1}^{n-2}$: 甲,乙其中一人被選中

$C_{k-2}^{n-2}=C_2^2\times C_{k-2}^{n-2}$: 甲,乙皆被選中

$\Rightarrow C_k^n=C_k^{n-2}+2C_{k-1}^{n-2}+C_{k-2}^{n-2}$ #