

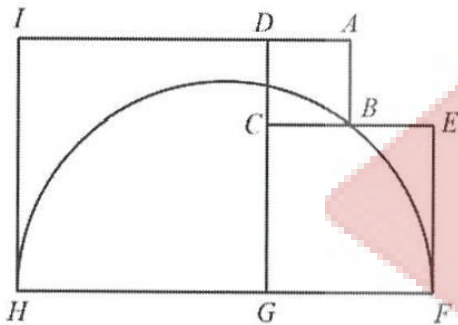
臺中市立臺中第一高級中等學校 110 學年度科學班甄選入學
數學能力測驗 試題卷

一、填充題：(10 題，每題 9 分，共 90 分。)

1. 若二次函數 $y = -2x^2 + x - 3$ ，當 $1 \leq x \leq 5$ 時， y 有最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m$ 之值為_____。

2. 有一棟大樓有 n 階台階，上樓時一步可走一個台階，也可走兩個台階，若走完這 n 階台階之所有不同的上樓方法數記為 a_n ，求 a_{2021} 被 7 除的餘數為_____。

3. 如圖，四邊形 $ABCD$ ， $EFGC$ ， $DGHI$ 皆為正方形，以 \overline{FH} 為直徑做一個半圓，若點 B 在半圓上且 $\overline{FH} = 1$ ，則這三個正方形的面積和為_____。

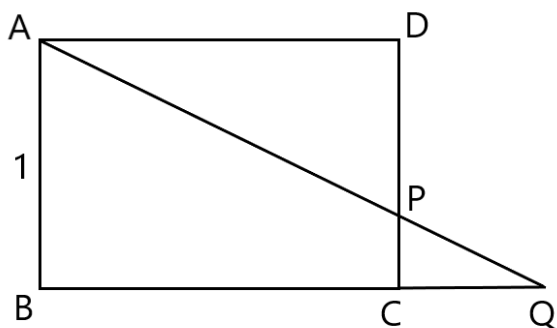


4. 假設拋物線 $\Gamma: y = x^2 - 2x + a$ 的頂點在直線 $L: mx - y + m = 0$ 上移動，為使拋物線 $\Gamma': y = -x^2$ 與 Γ 有交點，則 m 的範圍為_____。

5. 已知實數 a, b, c ，滿足 $abc = 12$ ， $a(b+1)(c+1) = 24$ ， $a(b+2)(c+2) = 40$ ，則 $a(b-1)(c-1)$ 的值為_____。

6. 若將 m 個相異物全放入 n 個相同的箱子且每一個箱子內至少都有一個物品的方法數，記為 $B(m, n)$ ，其中 m, n 皆為正整數且 $m \geq n$ ，則 $B(5, 1) + B(5, 2) + B(5, 3) + B(5, 4) + B(5, 5)$ 的值為_____。

7. 如圖，已知矩形 $ABCD$ 的邊 \overline{CD} 上取一點 P ，連接 A 和 P 並延長，與 \overline{BC} 邊的延長線交於 Q ，已知 $\overline{AB}=1$ ，當 $\triangle ADP$ 和 $\triangle CPQ$ 的面積和有最小值，則此時的 $\overline{DP}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。



8. 當坐標平面上的點 (x, y) 之坐標 x 與 y 都是整數時，稱點 (x, y) 為格子點。數學家知道：坐標平面上三個頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式 $I + \frac{1}{2}S - 1$ 來表示，其中 S 代表三角形三邊邊上的格子點數， I 是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數。已知 $\triangle ABC$ 的三頂點皆為格子點且其面積為 12 平方單位，則此 $\triangle ABC$ 內部及邊上的格子點數總和最多有 m 個，最少有 n 個，則數對 (m, n) 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(答對 m, n 其中一個得 5 分)

9. 第 13 屆科學班有 10 位學生一起報名參加 2022 年亞太數學奧林匹亞競賽初選考試。已知每人都答對了三題，且任何兩人所答對的問題，都至少有一題相同，則這 10 位學生當中，答對人數最多的那一道問題最少有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 人答對。

10. 在三角形 ABC 中，分別作內角 $\angle BAC$ 與 $\angle ABC$ 的角平分線 \overline{AP} 與 \overline{BQ} ，令 \overline{AP} 交 \overline{BC} 於 P 點， \overline{BQ} 交 \overline{AC} 於 Q 點。

已知 $\angle BAC$ 等於 60 度， $\angle ABC$ 等於 β 度， $\angle ACB$ 等於 γ 度，且 $\overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB}$ ，則數對 (β, γ) 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、計算證明題：(2 小題，每小題 5 分，共 10 分。請作答於答案卷上，並列出解題過程。)

1. 已知三個數 a, b, c 是兩兩相異的非零數碼，關於二位數 ab 和二位數 ba ，以及三位數 abc 和三位數 bac 之最大公因數的敘述，試回答下列問題：

問題 1：若二位數 ab 和二位數 ba 的最大公因數為 p ，請問 p 的最大可能值是多少？列出滿足 p 有最大值的一組 (ab, ba) ，並詳細論述所找到的 p 之最大值的推理過程。

問題 2：若三位數 abc 和三位數 bac 的最大公因數為 q ，請問 q 的最大可能值是多少？列出滿足 q 有最大值的一組 (abc, bac) ，並詳細論述所找到的 q 之最大值的推理過程。

試題結束

彌 封 裝 訂 線

臺中市立臺中第一高級中等學校 110 學年度科學班甄選入學
數學能力測驗 答案卷

初閱	複閱

作答說明：1. 請標明題號，依題號順序書寫。
2. 不得污損或書寫與答案無關之文字符號。

└ 從此寫起

一、填充題：(10 題，每題 9 分，共 90 分。)

1.	2.	3.	4.	5.
-52	1	$\frac{14}{25}$	$m \leq -\frac{1}{4}$	4
6.	7.	8.	9.	10.
52	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(26,15)	5	(80,40)

二、計算證明題：(2 小題，每小題 5 分，共 10 分。請作答於答案卷上，並列出解題過程。)

<p>1. 問題 1：12，參考一組(48,84)； 問題 2：63，參考一組(189,819)</p>
--