

# 2021 第 22 屆 AMC 10A

俞克斌老師 編授

1. 求算式  $(2^2 - 2) - (3^2 - 3) + (4^2 - 4)$  之值為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 8 (E) 12

答：(D)

解：所求  $= (4 - 2) - (9 - 3) + (16 - 4) = 8$

2. 中山高中的學生人數是大華高中學生人數的三倍，若兩校共有 2600 位學生，則中山高中有多少位學生？

(A) 600 (B) 650 (C) 1950 (D) 2000 (E) 2050

答：(C)

解： 
$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 2600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1950 \\ y = 650 \end{cases}$$

3. 有兩個正整數的和為 17402，其中一個數可被 10 整除且擦掉這個數的個位數字則恰等於另一個數，求這兩數之差為多少？

(A) 10272 (B) 11700 (C) 13362 (D) 14238 (E) 15426

答：(D)

解： 
$$\begin{cases} x + y = 17402 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15820 \\ y = 1582 \end{cases}, \text{ 故 } x - y = 14238$$

4. 一輛手拉車從山丘上滑下來，第一秒行進了 5 公寸，由於加速度的關係，在接下來的每一秒所行進的距離都比前一秒鐘多行進了 7 公寸。若此車從山頂滑到山腳共花了 30 秒，則此車總共行進了多少公寸？

(A) 215 (B) 360 (C) 2992 (D) 3195 (E) 3242

答：(D)

解：  $5 + (5 + 7) + (5 + 7 \times 2) + \cdots + (5 + 7 \times 29) = 5 \times 30 + 7 \times (1 + 2 + \cdots + 29) = 3195$

5. 已知某班  $k$  位學生 ( $k > 12$ ) 測驗的平均成績為 8 分，其中 12 位學生測驗的平均成績為 14 分。試問其餘學生測驗的平均成績為多少分？

(A)  $\frac{14-8}{k-12}$  (B)  $\frac{8k-168}{k-12}$  (C)  $\frac{14}{12} - \frac{8}{k}$  (D)  $\frac{14(k-12)}{k^2}$

(E)  $\frac{14(k-12)}{8k}$

答：(B)

解： 
$$\frac{8k - 14 \times 12}{k - 12} = \frac{8k - 168}{k - 12}$$

6. 小花與小珍從山腳朝著山上的防火瞭望台同時開始爬山，小珍揸著重裝備走的比較慢。小花開始時以每小時 4 公里的速率往上走，在到達防火瞭望台路程一半的地方，路徑開始變得陡峭，於是小花降低速率，以每小時 2 公里的速率繼續往上走，當她抵達防火瞭望台後立刻轉頭下山；在較陡的路徑上，她以每小時 3 公里的速率行進，她走到瞭望台到山腳路程一半的地方剛好遇到小珍。試問小珍的平均速率為每小時多少公里？
- (A)  $\frac{12}{13}$       (B) 1      (C)  $\frac{13}{12}$       (D)  $\frac{24}{13}$       (E) 2

答：(A)

解：  $\frac{\ell/2}{4} + \frac{\ell/2}{2} + \frac{\ell/2}{3} = \frac{\ell/2}{x} \Rightarrow x = \frac{12}{13}$

7. 湯姆收集了 13 條蛇，其中 4 條是紫色的，5 條是快樂的。他觀察到下列情形：
- 所有快樂的蛇都會加法；
  - 沒有紫色的蛇會減法；
  - 不會減法的蛇也不會加法。
- 請問關於湯姆的蛇，下列哪一個推論是正確的？
- (A) 紫色的蛇都會加法      (B) 紫色的蛇都快樂      (C) 會加法的蛇都是紫色的  
(D) 快樂的蛇都不是紫色的      (E) 快樂的蛇都不會減法

答：(D)

解：所有快樂的蛇都會加法：(快樂)  $\Rightarrow$  (加)  
 沒有紫色的蛇會減法：(紫)  $\Rightarrow \sim$ (減)  
 不會減法的蛇也不會加法： $\sim$ (減)  $\Rightarrow \sim$ (加)  
 故(快樂)  $\Rightarrow$  (加)  $\Rightarrow$  (減)  $\Rightarrow \sim$ (紫)

8. 有一位學生將 66 乘以循環小數  $1.\overline{ab} = 1.\underline{a}\underline{b}\underline{a}\underline{b}\dots$  時（其中  $\underline{a}$  及  $\underline{b}$  均為 0~9 的數字），她沒注意到循環小數的符號，誤將 66 乘以  $1.\underline{a}\underline{b}$ ，後來他發現他的答案比正確答案少了 0.5。試問二位數  $\underline{a}\underline{b}$  為何？
- (A) 15      (B) 30      (C) 45      (D) 60      (E) 75

答：(E)

解：  $66 \times (1.\overline{ab} - 1.\underline{ab}) = 0.5 \Rightarrow 66 \times \frac{10a+b}{9900} = \frac{1}{2} \Rightarrow 10a+b = 75$

9. 考慮所有的實數  $x$  與  $y$ ， $(xy-1)^2 + (x+y)^2$  最小可能的值為何？
- (A) 0      (B)  $\frac{1}{4}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D) 1      (E) 2

答：(D)

解：  $(xy-1)^2 + (x+y)^2 = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = (x^2+1)(y^2+1) \geq (1)(1) = 1$

10. 試問哪一個選項與下列算式相等？

$$(2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right)$$

- (A)  $3^{127}+2^{127}$  (B)  $3^{127}+2^{127}+2\cdot 3^{63}+3\cdot 2^{63}$  (C)  $3^{128}-2^{128}$   
 (D)  $3^{128}+2^{128}$  (E)  $5^{127}$

答：(C)

解：

$$\begin{aligned} & (2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^2-2^2\right)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^4-2^4\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^8-2^8\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^{16}-2^{16}\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^{32}-2^{32}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^{64}-2^{64}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^{128}-2^{128}\right) \end{aligned}$$

11. 試問  $b$  為哪一個選項時，以  $b$  進位制的表示法  $(2021)_b - (221)_b$  所代表的數不能被 3 整除？

(註：以  $b=5$  為例， $(123)_5 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3$ )

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

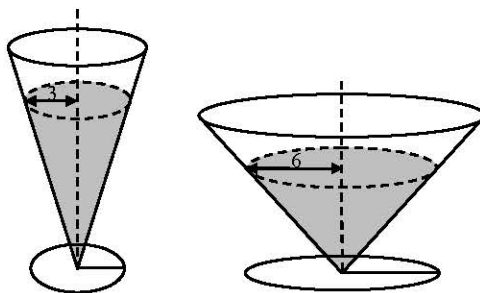
答：(E)

解：

$$(2021)_b - (221)_b = \left(2 \times b^3 + 2 \times b + 1\right) - \left(2 \times b^2 + 2 \times b + 1\right) = 2b^2(b-1)$$

當  $b=8$  不能被 3 整除

12. 如下圖所示，兩個直圓錐尖端朝下，裡面裝著相同且等量的液體，液體表面圓的半徑分別為 3 公分與 6 公分。在兩個圓錐中各放一顆半徑為 1 公分的球狀彈珠，彈珠完全沒入液體沉於底部，且沒有任何液體溢出。試問在窄圓錐中液面升高的高度與寬圓錐中液面升高的高度比為何？



- (A) 1:1 (B) 47:43 (C) 2:1 (D) 40:13 (E) 4:1

答：(E)

$$\begin{aligned} \text{解：} & \begin{cases} V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times H_{\text{窄}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times H_{\text{寬}} \Rightarrow H_{\text{窄}} = 4H_{\text{寬}} \\ V + \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times H'_{\text{窄}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times H'_{\text{寬}} \Rightarrow H'_{\text{窄}} = 4H'_{\text{寬}} \end{cases} \\ & \Rightarrow (H'_{\text{窄}} - H_{\text{窄}}) = 4(H'_{\text{寬}} - H_{\text{寬}}) \end{aligned}$$

13. 四面體  $ABCD$  中的稜長  $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{AC} = 3$ 、 $\overline{AD} = 4$ 、 $\overline{BC} = \sqrt{13}$ 、 $\overline{BD} = 2\sqrt{5}$  且  $\overline{CD} = 5$ ，試問此四面體的體積為多少？

- (A) 3      (B)  $2\sqrt{3}$       (C) 4      (D)  $3\sqrt{3}$       (E) 6

答：(C)

解：因為  $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{AC} = 3$ 、 $\overline{AD} = 4$  兩兩互相垂直

故為以  $\triangle ACD$  為底， $\overline{AB}$  為高的四面體，體積為  $\frac{3 \times 4}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = 4$

14. 若多項式方程式  $z^6 - 10z^5 + Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + 16 = 0$  所有的根均為正整數(可能有重根)，則  $B$  之值為何？

- (A) -88      (B) -80      (C) -64      (D) -41      (E) -40

答：(A)

解：由「韋達定理」得知，六根之和為 10、六根之積為 16

$$\begin{cases} 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 \\ 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \end{cases}, \text{故 } B = - \begin{pmatrix} 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times C_3^4 \\ + 2 \times 2 \times 1 \times C_2^4 C_1^2 \\ + 2 \times 1 \times 1 \times C_1^4 C_2^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 32 \\ + 48 \\ + 8 \end{pmatrix} = -88$$

15. 從  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  中選取四數當作字母  $A, B, C, D$  的數值，不重複選取(即它們均相異)。

若兩曲線  $y = Ax^2 + B$  與  $y = Cx^2 + D$  有交點，則共有多少種選法？(兩條曲線的選取與前後的順序無關，例如  $A=3, B=2, C=4, D=1$  和  $A=4, B=1, C=3, D=2$  的選取視為相同)

- (A) 30      (B) 60      (C) 90      (D) 180      (E) 360

答：(D)

解： $y = Ax^2 + B$  與  $y = Cx^2 + D$  有交點，則  $x^2 = \frac{D-B}{A-C} > 0$

方法數： $C_4^6 \times C_2^4 C_2^2 \times 2! = 180$

16. 在下面的數列中，整數  $n$  共出現  $n$  次，其中  $1 \leq n \leq 200$ 。

$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots, 200, 200, \dots, 200$ 。

試問這些數的中位數為下列哪一個選項？

- (A) 100.5      (B) 134      (C) 142      (D) 150.5      (E) 167

答：(C)

解：總個數  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 200 = 20100$

但  $\frac{141 \times 142}{2} = 10011 < 10050 < 10051 < \frac{142 \times 143}{2} = 10153$

中位數（第 10050 數與第 10051 數的平均）為 142

17. 梯形  $ABCD$  中  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = 43$ ，且  $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ 。對角線  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  交於  $O$  點， $P$  點為  $\overline{BD}$  的中點。已知  $\overline{OP} = 11$ ， $\overline{AD} = m\sqrt{n}$ ，其中  $m$  與  $n$  為正整數且  $n$  不能被任何質數的平方所整除，則  $m+n = ?$   
 (A) 65 (B) 132 (C) 157 (D) 194 (E) 215

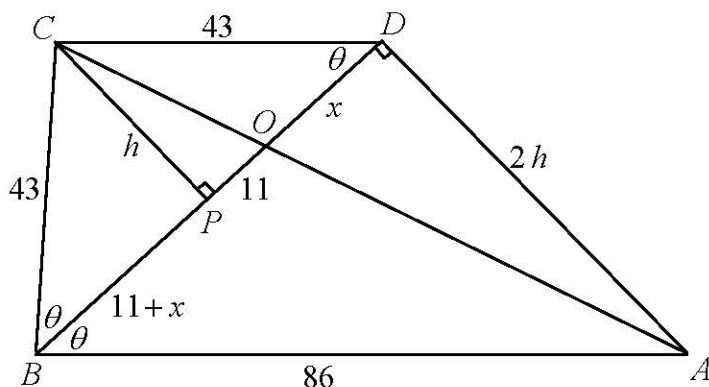
答：(D)

解：  $\left. \begin{array}{l} \angle ADB = \angle CPD = 90^\circ \\ \angle ABP = \angle CDP = \theta \end{array} \right\} \Delta ADB \sim \Delta CPD$

$$\overline{DB} = 2\overline{PD} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = 2\overline{CD} = 86 \\ \overline{AD} = 2\overline{CP} = 2h \end{cases}$$

$$\text{又 } \Delta ADO \sim \Delta CPO \Rightarrow \overline{OD} = 2\overline{OP} = 22$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{AD} &= 2\overline{CP} = 2\sqrt{43^2 - 33^2} \\ &= 2\sqrt{760} = 4\sqrt{190} \end{aligned}$$



18. 已知  $f$  是定義在正有理數的函數，使得對所有的正有理數  $a, b$ ， $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$  恆成立。若對所有的質數  $p$ ，函數  $f$  還滿足  $f(p) = p$ ，則下列選項中哪一個  $x$  可以使得  $f(x) < 0$ ？

- (A)  $\frac{17}{32}$  (B)  $\frac{11}{16}$  (C)  $\frac{7}{9}$  (D)  $\frac{7}{6}$  (E)  $\frac{25}{11}$

答：(E)

解：  $\frac{f(a \cdot b) = f(a) + f(b)}{\rightarrow} f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$$\frac{f(p) = p}{\rightarrow} \begin{cases} f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \\ f(1) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \\ f(1) = f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = -5 \\ \dots \end{cases}$$

$$\frac{f(a \cdot b) = f(a) + f(b)}{\rightarrow} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = -2n, f\left(\frac{1}{3^n}\right) = -3n, f\left(\frac{1}{5^n}\right) = -5n, \dots$$

$$(A) f\left(\frac{17}{32}\right) = f(17) + f\left(\frac{1}{2^5}\right) = 17 - 2 \times 5 = 7$$

$$(B) f\left(\frac{11}{16}\right) = f(11) + f\left(\frac{1}{2^4}\right) = 11 - 2 \times 4 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{(C)} \quad f\left(\frac{7}{9}\right) &= f(7) + f\left(\frac{1}{3^2}\right) = 7 - 3 \times 2 = 1 \\ \text{(D)} \quad f\left(\frac{7}{6}\right) &= f(7) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 7 - 2 - 3 = 2 \\ \text{(E)} \quad f\left(\frac{25}{11}\right) &= f(5^2) + f\left(\frac{1}{11}\right) = 2 \times 5 - 11 = -1 \end{aligned}$$

19. 在坐標平面上，若由  $x^2 + y^2 = 3|x-y| + 3|x+y|$  的圖形所圍的面積為  $m + n\pi$ ，其中  $m, n$  為整數，則  $m + n = ?$   
 (A) 18 (B) 27 (C) 36 (D) 45 (E) 54

答：(E)

$$\text{解：} 4 \left[ \frac{1}{2} \times \pi \times 3^2 + 3 \times 3 \right] = 36 + 18\pi$$

20. 在 1, 2, 3, 4, 5 的排列中沒有連續的三個數遞增，也沒有連續的三個數遞減的方法總共有多少種？  
 (A) 10 (B) 18 (C) 24 (D) 32 (E) 44

答：(D)

$$\begin{aligned} \text{解：} ( ) < ( ) > ( ) < ( ) > ( ) & \left\{ \begin{array}{l} ( ) < 5 > ( ) < 4 > ( ) \\ ( ) < 5 > ( ) < 3 > ( ) \Rightarrow 4 < 5 > ( ) < 3 > ( ) \Rightarrow 2! = 2 \text{ 種} \\ ( ) < 4 > ( ) < 5 > ( ) \Rightarrow 3! = 6 \text{ 種} \\ ( ) < 3 > ( ) < 5 > ( ) \Rightarrow ( ) < 3 > ( ) < 5 > 4 \Rightarrow 2! = 2 \text{ 種} \end{array} \right. \\ ( ) > ( ) < ( ) > ( ) < ( ) & \left\{ \begin{array}{l} ( ) > 1 < ( ) > 2 < ( ) \Rightarrow 3! = 6 \text{ 種} \\ ( ) > 1 < ( ) > 3 < ( ) \Rightarrow 2 > 1 < ( ) > 3 < ( ) \Rightarrow 2! = 2 \text{ 種} \\ ( ) > 2 < ( ) > 1 < ( ) \Rightarrow 3! = 6 \text{ 種} \\ ( ) > 3 < ( ) > 1 < ( ) \Rightarrow ( ) > 3 < ( ) > 1 < 2 \Rightarrow 2! = 2 \text{ 種} \end{array} \right. \end{aligned}$$

21. 設  $ABCDEF$  為一個等角六邊形，三條直線  $AB, CD, EF$  圍成一個三角形，其面積為  $192\sqrt{3}$ ，又三條直線  $BC, DE, FA$  圍成另一個三角形，其面積為  $324\sqrt{3}$ 。若六邊形  $ABCDEF$  的周長可以表示為  $m + n\sqrt{p}$ ，其中  $m, n, p$  為正整數， $p$  不能被任何質數平方所整除，則  $m + n + p = ?$   
 (A) 47 (B) 52 (C) 55 (D) 58 (E) 63

答：(C)

$$\begin{aligned} \text{解：} 192\sqrt{3} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2 \Rightarrow x = 16\sqrt{3} \quad 324\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times y^2 \Rightarrow y = 36 \\ m + n\sqrt{p} &= 16\sqrt{3} + 36 \end{aligned}$$

22. 海翰將 50 頁的代數筆記寫在 25 張紙上，第一張紙上是第 1 頁與第 2 頁，第二張紙上是第 3 頁與第 4 頁，…等。某天他將筆記留在桌上外出吃中餐，他的室友要借閱他筆記中的幾頁。他用餐回來後發現他的室友拿走了筆記中間連續的幾張，檢查後得到剩下的筆記頁數的平均值恰為 19，試問他的筆記被借走了幾張？

(A) 10 (B) 13 (C) 15 (D) 17 (E) 20

答：(B)

解：  $\frac{1+2+3+\cdots+50}{50} - 19 = \frac{51-38}{2} = \frac{13}{2}$ ，表筆記被借走了 13 張

析：  $\frac{[1+2+3+\cdots+50] - [(2n+1)+(2n+2)+\cdots+(2n+26)]}{50-26} = 19 \Rightarrow n=9$

被借走頁數：第 19 頁～第 44 頁，共 13 張

23. 青蛙小福在一張  $3 \times 3$  正方形格子紙上跳動，它每次隨機的朝上、朝下、朝左或朝右的方向跳一方格，但不會沿對角線的方向跳動。當小福跳動的方向會跳出格子紙的邊界時，它會跳到相當於將格子紙捲接起來的方格上。(例如從正中間的方格朝上跳兩次，第一次它會跳到頂層列中間位置的方格，第二次它會跳到底層列中間位置的方格。)設小福從整張格子紙正中間的方格開始跳動，它至多隨意跳四次，且其中若有跳到角落的方格時即停止跳動。試問它跳到角落方格的機率為多少？

(A)  $\frac{9}{16}$  (B)  $\frac{5}{8}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{25}{32}$  (E)  $\frac{13}{16}$

答：(D)

解：  $\frac{4}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{25}{32}$   
 形如  $\uparrow \rightarrow$       形如  $\uparrow \uparrow \rightarrow$       形如  $\uparrow \downarrow \uparrow \rightarrow$       形如  $\uparrow \uparrow \downarrow \rightarrow$

24. 考慮由  $(x+ay)^2 = 4a^2$  與  $(ax-y)^2 = a^2$  所圍的四邊形，其中  $a$  為正數。試問此四邊形面積為何？

(A)  $\frac{8a^2}{(a+1)^2}$  (B)  $\frac{4a}{a+1}$  (C)  $\frac{8a}{a+1}$  (D)  $\frac{8a^2}{a^2+1}$  (E)  $\frac{8a}{a^2+1}$

答：(D)

解：  $(x+ay)^2 = 4a^2 \Rightarrow \begin{cases} x+ay=2a \\ x+ay=-2a \end{cases}$ 、 $(ax-y)^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} ax-y=a \\ ax-y=-a \end{cases}$

所求長方形面積  $= d(x+ay=2a, x+ay=-2a) \times d(ax-y=a, ax-y=-a)$

$$= \frac{4a}{\sqrt{1+a^2}} \times \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{8a^2}{a^2+1}$$

25. 將相同的 3 個紅色籌碼，相同的 3 個藍色籌碼，相同的 3 個綠色籌碼放在一個  $3 \times 3$  的正方形格子紙的方格中。若規定同顏色的籌碼不可以是水平或垂直相鄰，則總共有多少種擺放方法？

(A) 12      (B) 18      (C) 24      (D) 30      (E) 36

答：(E)

解： 

$C$	$B$	$A$
$B$	$A$	$C$
$C$	$B$	$A$

 $\Rightarrow \underset{\text{中}}{3} \times \underbrace{\underset{\text{邊}}{2} \times \underset{\text{角}}{4}} \times \underset{\text{角}}{1}$  、 

$C$	$B$	$A$
$B$	$A$	$C$
$A$	$C$	$B$

 $\Rightarrow \underset{\text{中}}{3} \times \underset{\text{邊}}{4} \times \underset{\text{角}}{1}$