

2021 第 72 屆 AMC 12A

俞克斌老師 編授

1. 求 $2^{1+2+3} - (2^1 + 2^2 + 2^3)$ 之值為何？

(A) 0 (B) 50 (C) 52 (D) 54 (E) 57

答：(B)

解：所求 $= 64 - (2 + 4 + 8) = 50$

2. 設 a, b 為實數，試問下列哪一個敘述可使得 $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ 成立？

- (A) 等式恆不成立
(B) 等式成立的充要條件為 $ab = 0$
(C) 等式成立充要條件為 $a + b \geq 0$
(D) 等式成立充要條件為 $ab = 0$ 且 $a + b \geq 0$
(E) 等式恆成立

答：(D)

解： $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b \geq 0 \Rightarrow 0 = 2ab$

3. 有兩個正整數的和為 17402，其中一個數可被 10 整除且擦掉這個數的個位數字則恰等於另一個數，求這兩數之差為多少？

(A) 10272 (B) 11700 (C) 13362 (D) 14238 (E) 15426

答：(D)

解： $\begin{cases} x + y = 17402 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15820 \\ y = 1582 \end{cases}$ ，故 $x - y = 14238$

4. 湯姆收集了 13 條蛇，其中 4 條是紫色的，5 條是快樂的。他觀察到下列情形：

- 所有快樂的蛇都會加法；
- 沒有紫色的蛇會減法；
- 不會減法的蛇也不會加法。

請問關於湯姆的蛇，下列哪一個推論是正確的？

- (A) 紫色的蛇都會加法 (B) 紫色的蛇都快樂 (C) 會加法的蛇都是紫色的
(D) 快樂的蛇都不是紫色的 (E) 快樂的蛇都不會減法

答：(D)

解：所有快樂的蛇都會加法： $(\text{快樂}) \Rightarrow (\text{加})$
沒有紫色的蛇會減法： $(\text{紫}) \Rightarrow \sim(\text{減})$
不會減法的蛇也不會加法： $\sim(\text{減}) \Rightarrow \sim(\text{加})$
故 $(\text{快樂}) \Rightarrow (\text{加}) \Rightarrow (\text{減}) \Rightarrow \sim(\text{紫})$

5. 有一位學生將 66 乘以循環小數 $1.\overline{ab} = 1.\underline{a}\underline{b}\underline{a}\underline{b}\dots$ 時 (其中 \underline{a} 及 \underline{b} 均為 0~9 的數字)，她沒注意到循環小數的符號，誤將 66 乘以 $1.\underline{a}\underline{b}$ ，後來他發現他的答案比正確答案少了 0.5。試問二位數 $\underline{a}\underline{b}$ 為何？
(A) 15 (B) 30 (C) 45 (D) 60 (E) 75

答：(E)

解： $66 \times (1.\overline{ab} - 1.\underline{ab}) = 0.5 \Rightarrow 66 \times \frac{10a+b}{9900} = \frac{1}{2} \Rightarrow 10a+b = 75$

6. 有一疊卡片只有紅色與黑色兩種。從這疊卡片中隨機抽取一張卡片是紅色的機率為 $\frac{1}{3}$ 。若在原先這疊卡片中加入 4 張黑色的卡片後，則隨機抽取一張卡片是紅色的機率變為 $\frac{1}{4}$ 。那麼原來這疊卡片中總共有幾張卡片？
(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

答：(C)

解： $\frac{x}{3x+4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$ 。原來這疊卡片中總共有 $3x = 12$ 張卡片

7. 考慮所有的實數 x 與 y ， $(xy-1)^2 + (x+y)^2$ 最小可能的值為何？
(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) 2

答：(D)

解： $(xy-1)^2 + (x+y)^2 = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = (x^2+1)(y^2+1) \geq (1)(1) = 1$

8. 有一數列定義為 $D_0 = 0$ ， $D_1 = 0$ ， $D_2 = 1$ 且對所有的整數 $n \geq 3$ ， $D_n = D_{n-1} + D_{n-3}$ 。若以 E 表示偶數、 O 表示奇數，則 $(D_{2021}, D_{2022}, D_{2023})$ 的奇偶排列為下列何者？
(A) (O, E, O) (B) (E, E, O) (C) (E, O, E) (D) (O, O, E) (E) (O, O, O)

答：(C)

解： $D_0 = \text{偶}$ ， $D_1 = \text{偶}$ ，

$D_2 = \text{奇}$ 、 $D_3 = \text{奇}$ 、 $D_4 = \text{奇}$ 、 $D_5 = \text{偶}$ 、 $D_6 = \text{奇}$ 、 $D_7 = \text{偶}$ 、 $D_8 = \text{偶}$ 、

$D_9 = \text{奇}$ 、 $D_{10} = \text{奇}$ 、 $D_{11} = \text{奇}$ 、 $D_{12} = \text{偶}$ 、 $D_{13} = \text{奇}$ 、 $D_{14} = \text{偶}$ 、 $D_{15} = \text{偶}$ 、

... (每七項一循環)

$D_{2018} = \text{奇}$ 、 $D_{2019} = \text{奇}$ 、 $D_{2020} = \text{奇}$ 、 $D_{2021} = \text{偶}$ 、 $D_{2022} = \text{奇}$ 、 $D_{2023} = \text{偶}$ 、 $D_{2024} =$

偶、

9. 試問哪一個選項與下列算式相等？

$$(2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right)$$

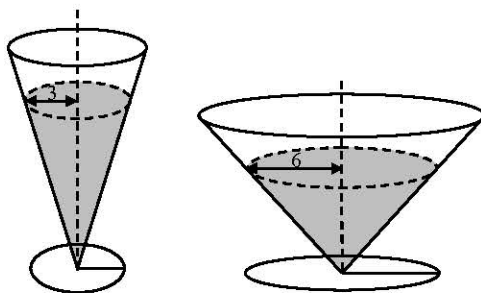
- (A) $3^{127}+2^{127}$ (B) $3^{127}+2^{127}+2\cdot 3^{63}+3\cdot 2^{63}$ (C) $3^{128}-2^{128}$
 (D) $3^{128}+2^{128}$ (E) 5^{127}

答：(C)

解：

$$\begin{aligned} & (2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^2-2^2\right)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^4-2^4\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^8-2^8\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^{16}-2^{16}\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^{32}-2^{32}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^{64}-2^{64}\right)\left(2^{64}+3^{64}\right) \\ &= \left(3^{128}-2^{128}\right) \end{aligned}$$

10. 如下圖所示，兩個直圓錐尖端朝下，裡面裝著相同且等量的液體，液體表面圓的半徑分別為 3 公分與 6 公分。在兩個圓錐中各放一顆半徑為 1 公分的球狀彈珠，彈珠完全沒入液體沉於底部，且沒有任何液體溢出。試問在窄圓錐中液面升高的高度與寬圓錐中液面升高的高度比為何？



- (A) 1:1 (B) 47:43 (C) 2:1 (D) 40:13 (E) 4:1

答：(E)

解：

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times H_{\text{窄}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times H_{\text{寬}} \Rightarrow H_{\text{窄}} = 4H_{\text{寬}} \\ V + \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times H'_{\text{窄}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times H'_{\text{寬}} \Rightarrow H'_{\text{窄}} = 4H'_{\text{寬}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (H'_{\text{窄}} - H_{\text{窄}}) = 4(H'_{\text{寬}} - H_{\text{寬}})$$

11. 有一雷射筆放置在點 $(3,5)$ ，雷射光是以直線行進。小賴將雷射光射向 y 軸方向，經 y 軸反射後射向 x 軸方向，再經 x 軸反射到點 $(7,5)$ 。試問此雷射光所行經的路徑總長為多少？
 (A) $2\sqrt{10}$ (B) $5\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{2}$ (D) $15\sqrt{2}$ (E) $10\sqrt{5}$

答：(C)

解： $(3,5)$ 關於 y 軸的對稱點 $(-3,5)$ 、 $(7,5)$ 關於 x 軸的對稱點 $(7,-5)$
 此雷射光所行經的路徑總長為 $d((-3,5),(7,-5))=10\sqrt{2}$

12. 若多項式方程式 $z^6 - 10z^5 + Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + 16 = 0$ 所有的根均為正整數(可能有重根)，則 B 之值為何？
 (A) -88 (B) -80 (C) -64 (D) -41 (E) -40

答：(A)

解：由「韋達定理」得知，六根之和為10、六根之積為16

$$\begin{cases} 10 = 2+2+2+2+1+1 \\ 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \end{cases}, \text{故 } B = - \begin{pmatrix} 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times C_3^4 \\ + 2 \times 2 \times 1 \times C_2^4 C_1^2 \\ + 2 \times 1 \times 1 \times C_1^4 C_2^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 32 \\ + 48 \\ + 8 \end{pmatrix} = -88$$

13. 下列選項中哪一個複數 z ，可使得 z^5 的實部之值最大？

(A) -2 (B) $-\sqrt{3}+i$ (C) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ (D) $-1+\sqrt{3}i$ (E) $2i$

答：(B)

解：(A) $(-2)^5 = -32$
 (B) $(-\sqrt{3}+i)^5 = 16\sqrt{3}+16i$
 (C) $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^5 = 16\sqrt{2}-16\sqrt{2}i$
 (D) $(-1+\sqrt{3}i)^5 = -16-16\sqrt{3}i$
 (E) $(2i)^5 = 32i$

14. 試求 $\left(\sum_{k=1}^{20} \log_{5^k} 3^{k^2}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} \log_{9^k} 25^k\right) = ?$

(註： $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$)

(A) 21 (B) $100\log_5 3$ (C) $200\log_3 5$ (D) 2200 (E) 21000

答：(E)

解： $\left(\sum_{k=1}^{20} \log_{5^k} 3^{k^2}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} \log_{9^k} 25^k\right) = \left(\sum_{k=1}^{20} k \log_5 3\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} \log_3 5\right)$
 $= \left(\log_5 3 \sum_{k=1}^{20} k\right) \cdot (100 \log_3 5) = \left(\sum_{k=1}^{20} k\right) \cdot (100) = \left(\frac{20 \times 21}{2}\right) \cdot (100) = 21000$

15. 合唱團的指揮要從 6 位男高音與 8 位男低音中選取一些人組成一個小團體，唯一的要求是小團體中男高音與男低音人數的差距須為 4 的倍數，且小團體中至少要有一個人。設選取小團體的方法數為 N ，試問 N 除以 1000 的餘數為多少？
(A) 47 (B) 48 (C) 83 (D) 95 (E) 96

答：(D)

解：高 6 低 2、6 $\Rightarrow C_6^6 C_2^8 + C_6^6 C_6^8 = 28 + 28 = 56$

高 5 低 1、5 $\Rightarrow C_5^6 C_1^8 + C_5^6 C_5^8 = 48 + 336 = 384$

高 4 低 0、4、8 $\Rightarrow C_4^6 C_0^8 + C_4^6 C_4^8 + C_4^6 C_8^8 = 15 + 1050 + 15 = 1080$

高 3 低 3、7 $\Rightarrow C_3^6 C_3^8 + C_3^6 C_7^8 = 1120 + 160 = 1280$

高 2 低 2、6 $\Rightarrow C_2^6 C_2^8 + C_2^6 C_6^8 = 420 + 420 = 840$

高 1 低 1、5 $\Rightarrow C_1^6 C_1^8 + C_1^6 C_5^8 = 48 + 336 = 384$

高 0 低 4、8 $\Rightarrow C_0^6 C_4^8 + C_0^6 C_8^8 = 70 + 1 = 71$

16. 在下面的數列中，整數 n 共出現 n 次，其中 $1 \leq n \leq 200$ 。
1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ..., 200, 200, ..., 200.

試問這些數的中位數為下列哪一個選項？

- (A) 100.5 (B) 134 (C) 142 (D) 150.5 (E) 167

答：(C)

解：總個數 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 200 = 20100$

但 $\frac{141 \times 142}{2} = 10011 < 10050 < 10051 < \frac{142 \times 143}{2} = 10153$

中位數（第 10050 數與第 10051 數的平均）為 142

17. 梯形 $ABCD$ 中 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = 43$ ，且 $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ 。對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於 O 點， P 點為 \overline{BD} 的中點。已知 $\overline{OP} = 11$ ， $\overline{AD} = m\sqrt{n}$ ，其中 m 與 n 為正整數且 n 不能被任何質數的平方所整除，則 $m + n = ?$

- (A) 65 (B) 132 (C) 157 (D) 194 (E) 215

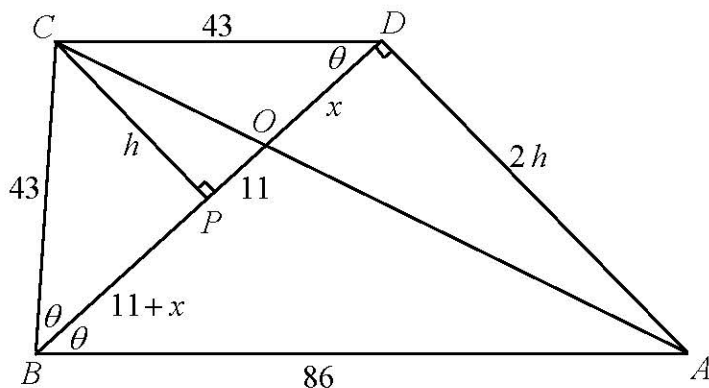
答：(D)

解： $\left. \begin{array}{l} \angle ADB = \angle CPD = 90^\circ \\ \angle ABP = \angle CDP = \theta \end{array} \right\} \Delta ADB \sim \Delta CPD$

$\overline{DB} = 2\overline{PD} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = 2\overline{CD} = 86 \\ \overline{AD} = 2\overline{CP} = 2h \end{cases}$

又 $\Delta ADO \sim \Delta CPO \Rightarrow \overline{OD} = 2\overline{OP} = 22$

故 $\overline{AD} = 2\overline{CP} = 2\sqrt{43^2 - 33^2}$
 $= 2\sqrt{760} = 4\sqrt{190}$



18. 已知 f 是定義在正有理數的函數，使得對所有的正有理數 a, b , $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ 恆成立。若對所有的質數 p , 函數 f 還滿足 $f(p) = p$, 則下列選項中哪一個 x 可以使得 $f(x) < 0$?

- (A) $\frac{17}{32}$ (B) $\frac{11}{16}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) $\frac{7}{6}$ (E) $\frac{25}{11}$

答 : (E)

解 : $\frac{f(a \cdot b) = f(a) + f(b)}{f(p) = p} \rightarrow f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$$\frac{f(p) = p}{f(a \cdot b) = f(a) + f(b)} \rightarrow \begin{cases} f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \\ f(1) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \\ f(1) = f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = -5 \\ \dots \end{cases}$$

$$\frac{f(a \cdot b) = f(a) + f(b)}{f(p) = p} \rightarrow f\left(\frac{1}{2^n}\right) = -2n, f\left(\frac{1}{3^n}\right) = -3n, f\left(\frac{1}{5^n}\right) = -5n, \dots$$

$$(A) f\left(\frac{17}{32}\right) = f(17) + f\left(\frac{1}{2^5}\right) = 17 - 2 \times 5 = 7$$

$$(B) f\left(\frac{11}{16}\right) = f(11) + f\left(\frac{1}{2^4}\right) = 11 - 2 \times 4 = 3$$

$$(C) f\left(\frac{7}{9}\right) = f(7) + f\left(\frac{1}{3^2}\right) = 7 - 3 \times 2 = 1$$

$$(D) f\left(\frac{7}{6}\right) = f(7) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 7 - 2 - 3 = 2$$

$$(E) f\left(\frac{25}{11}\right) = f(5^2) + f\left(\frac{1}{11}\right) = 2 \times 5 - 11 = -1$$

19. 方程式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$ 在閉區間 $[0, \pi]$ 中有多少個解 ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

答 : (C)

解 : $\frac{\pi}{2}\cos x + \frac{\pi}{2}\sin x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{其中 } 0 \leq x \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}$$

20. 若以 V 為頂點、 F 為焦點的拋物線上有一點 A ，使得 $\overline{AF} = 20$ 、 $\overline{AV} = 21$ ，則 \overline{FV} 所有可能長度的和為多少？

- (A) 13 (B) $\frac{40}{3}$ (C) $\frac{41}{3}$ (D) 14 (E) $\frac{43}{3}$

答：(B)

解： $21^2 - (20 - c)^2 = 20^2 - (20 - 2c)^2 \Rightarrow 3c^2 - 40c + 41 = 0 \Rightarrow$ 兩根之和 $\frac{40}{3}$

21. 設方程式 $(z-1)(z^2+2z+4)(z^2+4z+6)=0$ 的五個解可以表示為 $x_k + y_k i$ ， $1 \leq k \leq 5$ ，其中 x_k, y_k 均為實數；並設 ε 是通過 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ， (x_3, y_3) ， (x_4, y_4) 及 (x_5, y_5) 的唯一橢圓。若 ε 的離心率為 $\sqrt{\frac{m}{n}}$ ，其中 m, n 為互質的正整數，則 $m+n = ?$ (注意：橢圓 ε 的離心率是指比例 $\frac{c}{a}$ ，其中 $2a$ 是橢圓的長軸長， $2c$ 是兩焦點的距離)

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

答：(A)

解： $(z-1)(z^2+2z+4)(z^2+4z+6)=0$ 的五個解 $1, -1 \pm \sqrt{3}i, -2 \pm \sqrt{2}i$

$$(1, 0), (-1, \pm\sqrt{3}), (-2, \pm\sqrt{2}) \in \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{故 } h = -\frac{9}{10}, a = \frac{19}{10}, b = \frac{19}{2\sqrt{30}}, \text{ 則 } c = \frac{19}{10\sqrt{6}}$$

$$\text{故 } \varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

22. 若多項式方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三個根為 $\cos\frac{2\pi}{7}$ 、 $\cos\frac{4\pi}{7}$ 、 $\cos\frac{6\pi}{7}$ ，其中角度是弧度，則乘積 abc 之值為多少？

- (A) $-\frac{3}{49}$ (B) $-\frac{1}{28}$ (C) $\frac{\sqrt[3]{7}}{64}$ (D) $\frac{1}{32}$ (E) $\frac{1}{28}$

答：(D)

$$\begin{aligned} \text{解：} a &= -\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{-\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} + \sin\frac{-3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} + \sin\frac{-5\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(s\sin\frac{-\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}\right)=\frac{1}{2} \\
b &= \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{-2\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{-2\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right) \\
&= \left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2} \\
c &= -\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right)=-\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\right) \\
&= -\frac{2^3\sin\frac{2\pi}{7}}{2^3\sin\frac{2\pi}{7}}\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\right)=-\frac{2^2}{2^3\sin\frac{2\pi}{7}}\left(\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\right) \\
&= -\frac{2}{2^3\sin\frac{2\pi}{7}}\left(\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2^3\sin\frac{2\pi}{7}}\left(\sin\frac{16\pi}{7}\right) \\
&= -\frac{1}{2^3\sin\frac{2\pi}{7}}\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)=-\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

23. 青蛙小福在一張 3×3 正方形格子紙上跳動，它每次隨機的朝上、朝下、朝左或朝右的方向跳一方格，但不會沿對角線的方向跳動。當小福跳動的方向會跳出格子紙的邊界時，它會跳到相當於將格子紙捲接起來的方格上。(例如從正中間的方格朝上跳兩次，第一次它會跳到頂層列中間位置的方格，第二次它會跳到底層列中間位置的方格。)設小福從整張格子紙正中間的方格開始跳動，它至多隨意跳四次，且其中若有跳到角落的方格時即停止跳動。試問它跳到角落方格的機率為多少？

(A) $\frac{9}{16}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{25}{32}$ (E) $\frac{13}{16}$

答：(D)

解： $\frac{4}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{4}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{4}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{4}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{25}{32}$
形如 $\uparrow\rightarrow$ 形如 $\uparrow\uparrow\rightarrow$ 形如 $\uparrow\downarrow\rightarrow$ 形如 $\uparrow\uparrow\downarrow\rightarrow$

24. 半圓 Γ 的直徑 \overline{AB} 之長為14，圓 Ω 切 \overline{AB} 於點 P 且交 Γ 於點 Q 與點 R 。

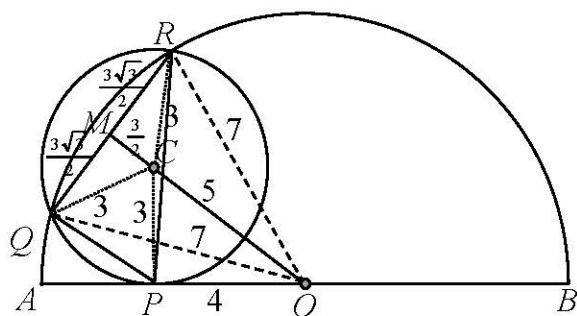
若 $\overline{QR}=3\sqrt{3}$ 且 $\angle QPR=60^\circ$ ，則 ΔPQR 的面積為 $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ ，

其中 a 與 c 是互質的正整數， b 為正整數且不能被任何質數的平方所整除。
試問 $a+b+c$ 之值為多少？

(A) 110 (B) 114 (C) 118 (D) 122 (E) 126

答：(D)

解：



$\overline{QR} = 3\sqrt{3}$ 且 $\angle QPR = 60^\circ$ ，則 $\angle QCR = 120^\circ$ 、 $\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR} = 3$

M 為 \overline{QR} 中點，故 $\overline{MQ} = \overline{MR} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 、 $\overline{CM} = \frac{3}{2}$

又 $\overline{OQ} = \overline{OR} = 7$ ，故 $\overline{OM} = \frac{13}{2} \Rightarrow \overline{OC} = 5 \Rightarrow \overline{OP} = 4$

令 $\angle QCP = \theta$ 、 $\angle PCO = 120^\circ - \theta$ ，由正弦定律： $\overline{PQ} = 6\sin\frac{\theta}{2}$ 、 $\overline{PR} = 6\sin\left(120^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$

故 ΔPQR 的面積為 $\frac{1}{2} \times 6\sin\frac{\theta}{2} \times 6\sin\left(120^\circ - \frac{\theta}{2}\right) \times \sin 60^\circ$

$$= 9\sqrt{3} \sin\frac{\theta}{2} \sin\left(120^\circ - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{-9\sqrt{3}}{2} [\cos 120^\circ - \cos(\theta - 120^\circ)]$$

$$= \frac{-9\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{1}{2} - \cos \angle PCO\right] = \frac{9\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right] = \frac{99\sqrt{3}}{20}$$

25. 設 $d(n)$ 表示可以整除 n 的正整數之個數，包含 1 與 n 。

例如： $d(1)=1$ ， $d(2)=2$ ， $d(12)=6$ 。令 $f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt[3]{n}}$ ，

已知存在唯一的正整數 N 滿足對所有的正整數 $n \neq N$ ， $f(N) > f(n)$ 都成立，試問 N 的各位數字和為多少？

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

答：(E)

解：令 $n = 2^{p_1} \times 3^{p_2} \times 5^{p_3} \times 7^{p_4} \times 11^{p_5} \times \dots$

$d(n)$ 表示可以 n 的正因數個數 $= (p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)(p_4 + 1)(p_5 + 1) \dots$

$$f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt[3]{n}} = \frac{(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)(p_4 + 1)(p_5 + 1) \dots}{\left(2^{p_1} \times 3^{p_2} \times 5^{p_3} \times 7^{p_4} \times 11^{p_5} \times \dots\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{而 } \frac{(0+1)^3}{2^0} = 1 < \frac{(1+1)^3}{2^1} = 4 < \frac{(2+1)^3}{2^2} = \frac{27}{4} < \frac{(3+1)^3}{2^3} = 8 > \frac{(4+1)^3}{2^4} = \frac{125}{16}$$

$$\text{而 } \frac{(0+1)^3}{3^0} = 1 < \frac{(1+1)^3}{3^1} = \frac{8}{3} < \frac{(2+1)^3}{3^2} = 3 > \frac{(3+1)^3}{3^3} = \frac{64}{27}$$

$$\text{而 } \frac{(0+1)^3}{5^0} = 1 < \frac{(1+1)^3}{5^1} = \frac{8}{5} > \frac{(2+1)^3}{5^2} = \frac{27}{25}$$

$$\text{而 } \frac{(0+1)^3}{7^0} = 1 < \frac{(1+1)^3}{7^1} = \frac{8}{7} > \frac{(2+1)^3}{7^2} = \frac{27}{49}$$

$$\text{而 } \frac{(0+1)^3}{11^0} = 1 > \frac{(1+1)^3}{11^1} = \frac{8}{11}$$

$$\text{故 } N = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 2520$$