109 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

試 題 解 答

編號	【筆試一】第一題　N 2
類別	□ 代數(A)　■ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)
試題來源	■ 自編　□ 改編於：
類易度	□ 難　■ 中等　□ 易　**滿分 30 人**

【筆試一】第一題

試找出所有可能的三個連續正整數，它們都是質數的正整數次方。

【解】

三個連續正整數 $n, n+1, n+2$ 中至少有一個偶數，它必須是 2 的次方，考慮 $2^1=2$、$2^2=4$、$2^3=8$，即可得到 $(2, 3, 4)$，$(3, 4, 5)$，$(7, 8, 9)$ 三組答案。

以下證明除了這三組之外，不會有其他的解。設還有其他三個連續正整數的解，此三數中有一數為 2^k，且 $k \ge 4$。因為連續的兩個偶數都是 2 的次方者只有 $2^1=2$ 與 $2^2=4$，所以，這三個連續正整數必為 $2^k-1,\ 2^k,\ 2^k+1$。

又三個連續正整數中至少有一個數能被 3 整除，所以，2^k-1 與 2^k+1 中有一個數為 3 的次方。

(1) 若 $2^k-1=3^n$，由 $k \ge 4$，$2^k-1 \equiv 7 \pmod 8$，且當 $n=2m$ 為偶數時，$3^{2m} \equiv 1 \pmod 8$；而當 $n=2m+1$ 為奇數時，$3^{2m+1} \equiv 3 \pmod 8$，矛盾！所以，$2^k-1 \ne 3^n$。

(2) 若 $2^k+1=3^n$，因為 $k \ge 4$，$2^k+1 \equiv 1 \pmod 4$，且 $3^{2m} \equiv 1 \pmod 4$、$3^{2m+1} \equiv 3 \pmod 4$，所以，$n$ 必為偶數。又因為

$$2^{3x}+1 \equiv 2 \pmod 7,\quad 2^{3x+1}+1 \equiv 3 \pmod 7,\quad 2^{3x+2}+1 \equiv 5 \pmod 7;$$

而 $3^{6y} \equiv 1 \pmod 7$，$3^{6y+2} \equiv 2 \pmod 7$，$3^{6y+4} \equiv 4 \pmod 7$，所以，$2^k+1=3^n \equiv 2 \pmod 7$。

由此可知 2^k-1 是 7 的次方，即 $2^k-1=7^z$；但是 $2^k-1 \equiv 15 \pmod{16}$，且

$$7^{2w} \equiv 1 \pmod{16},\quad 7^{2w+1} \equiv 7 \pmod{16}，矛盾！$$

因此，滿足條件的三個連續正整數恰有 $(2, 3, 4)$，$(3, 4, 5)$，$(7, 8, 9)$ 三組。

編號	【筆試一】第二題　A 2
類別	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)
試題來源	■ 自編　□ 改編於：
類易度	□ 難　■ 中等　□ 易　**滿分 25 人**

【筆試一】第二題

設 $P(x)$ 為 n 次多項式 $(n\ge 1)$，其各項係數都是非負實數，且領導係數與常數項都是1。已知方程式 $P(x)=0$ 的所有解都是實數，試證：對任意 $x\ge 0$，不等式 $P(x)\ge (x+1)^n$ 恆成立。

【解】

首先觀察，當 $n=1$ 時，所以 $P(x)=x+1$，而方程式 $P(x)=0$ 的解為 $x=-1$。

當 $n=2$ 時，令 $P(x)=x^2+ax+1$，其中 $a\ge 0$，且 $P(x)=0$ 的根為 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$。其中 $a^2-4\ge 0$。可推得 $a\ge 2$，且二根都是負數，因此，$P(x)=x^2+ax+1\ge (x+1)^2$。

當 $n\ge 3$ 時，令 $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+1$，根據題意，$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 都是非負實數。因此，$P(x)\ge 1$，對任意 $x\ge 0$ 均成立。又 $P(x)=0$ 的所有解都是實數，由上述討論得知這些解都必為負數。令 $-x_1,-x_2,\cdots,-x_n$ 為 $P(x)=0$ 的所有實數解，其中，$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，$x_1\times x_2\times\cdots\times x_n=1$，且

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+1=(x+x_1)(x+x_2)\times\cdots\times(x+x_n)。$$

欲證：對任意 $x\ge 0$，$P(x)\ge (x+1)^n$，即證 $P(x)=(x+x_1)(x+x_2)\times\cdots\times(x+x_n)\ge (x+1)^n$，亦即

$$\sqrt[n]{(x+x_1)(x+x_2)\times\cdots\times(x+x_n)}\ge x+1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt[n]{(x+x_1)(x+x_2)\times\cdots\times(x+x_n)}}\le 1。$$

當 $x=0$ 時，命題顯然成立。當 $x>0$ 時，利用算幾不等式，

$$\frac{x+1}{\sqrt[n]{(x+x_1)(x+x_2)\times\cdots\times(x+x_n)}}$$

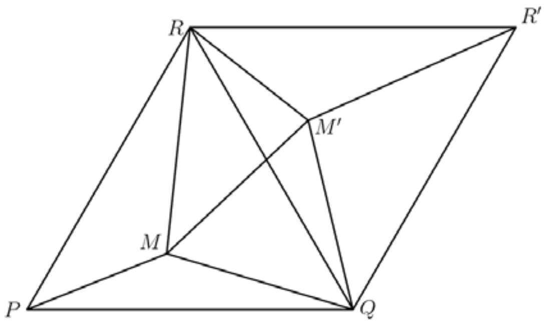
$$=\sqrt[n]{(\frac{x}{x+x_1})(\frac{x}{x+x_2})\times\cdots\times(\frac{x}{x+x_n})}+\sqrt[n]{(\frac{x_1}{x+x_1})(\frac{x_2}{x+x_2})\times\cdots\times(\frac{x_n}{x+x_n})}$$

$$\le\frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+x_1}+\frac{x}{x+x_2}+\cdots+\frac{x}{x+x_n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x+x_1}+\frac{x_2}{x+x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x+x_n}\right)=\frac{1}{n}\cdot n=1。$$

編號	【筆試一】第三題　G 7
類別	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)
試題來源	☐ 自編　☐ 改編於：
難易度	☐ 難　■ 中等　☐ 易　　**滿分 23 人**

【筆試一】第三題

給定銳角三角形 ABC，其三邊長 $\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$、$\overline{AB}=c$，又正三角形 PQR 內一點 M，滿足 $\overline{PM}=a$、$\overline{QM}=b$、$\overline{RM}=c$；並設 ΔPQR 以點 Q 為中心順時針方向旋轉 $60°$ 後得到 $\Delta RQR'$，且點 M 移轉到點 M'，如下圖所示：



（1） 試證：四邊形 $PQRM$ 與四邊形 $MQM'R$ 的面積相等，並求此面積（以 a,b,c 表示）。

（2） 若 D 為 ΔABC 內部的一點，使得 $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120°$ (即 D 為 ΔABC 的費馬點)，且 $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}=d$，試求 ΔPQR 的面積（以 d 表示）。

【解】

(1) 顯然，$\Delta PMQ \cong \Delta RM'Q$ (SSS 全等性質)。因此，

$$\square PQRM \text{ 的面積} = |\Delta PMQ| + |\Delta MQR| = |\Delta RQM'| + |\Delta MQR| = \square MQM'R \text{ 的面積。}$$

又 $\Delta MM'Q$ 為正三角形，得 $\overline{MM'}=\overline{MQ}=b$；所以，$\Delta MRM' \cong \Delta ABC$ (SSS 全等性質)。因此，

$$\square PQRM \text{ 的面積} = \square MQM'R \text{ 的面積}$$

$$= |\Delta MRM'| + |\Delta MQM'| = |\Delta ABC| + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$。

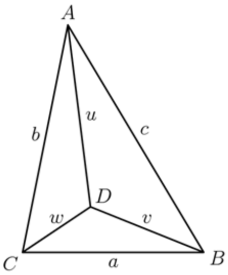
(2) 由對稱性可得

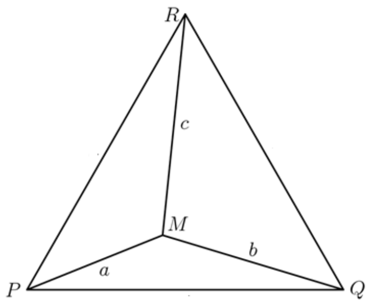
$$\square QRPM \text{ 的面積} = \left|\Delta ABC\right| + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \text{，} \square RPQM \text{ 的面積} = \left|\Delta ABC\right| + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \text{。}$$

因此，

$$\left|\Delta PQR\right| = \frac{1}{2}\times(\ \square PQRM \text{ 的面積} + \square QRPM \text{ 的面積} + \square RPQM \text{ 的面積}\ )$$

$$= \frac{3}{2}\left|\Delta ABC\right| + \frac{\sqrt{3}}{8}(a^2+b^2+c^2) \text{。}$$





令 $\overline{AD}=u$ 、 $\overline{BD}=v$ 、 $\overline{CD}=w$ ，則

$$\left|\Delta ABC\right| = \frac{1}{2}(uv+vw+wu)\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(uv+vw+wu) \text{。}$$

由餘弦定理， $a^2=w^2+wv+v^2$ 、 $b^2=u^2+uw+w^2$ 、 $c^2=v^2+vu+u^2$ ，可得

$$a^2+b^2+c^2 = 2(u^2+v^2+w^2)+uv+vw+wu \text{ 。}$$

因此，

$$\left|\Delta PQR\right| = \frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}(uv+vw+wu) + \frac{\sqrt{3}}{8}\times\left(2(u^2+v^2+w^2)+uv+vw+wu\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(u^2+v^2+w^2+2uv+2vw+2wu\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(u+v+w)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 \text{ 。}$$

編號	【筆試二】第一題　A 4
類別	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)
試題來源	□ 自編　■ 改編於：2004 IMO Short List
類易度	■ 難　□ 中等　□ 易　**滿分 6 人**

【筆試二】第一題

設 $\mathbb{N}$ 表示所有正整數所成的集合，且函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 滿足：對於任意的 $m,n\in\mathbb{N}$，$(f(m))^2+f(n)$ 可以整除 $(m^2+n)^2$。試證：對所有的 $n\in\mathbb{N}$，$f(n)=n$。

【解】

當 $m=n=1$ 時，由題設可知 $(f(1))^2+f(1)$ 為 $(1^2+1)^2=4$ 的因數。因為 $x^2+x=4$ 沒有正整數解，且 $(f(1))^2+f(1)>1$，所以，$(f(1))^2+f(1)=2$，故 $f(1)=1$。因此，

當 $m=1$ 時，$1+f(n)\,\big|\,(1+n)^2$，其中 n 為任意正整數。……………………..(1)

當 $n=1$ 時，$(f(m))^2+1\,\big|\,(m^2+1)^2$，其中 m 為任意正整數。……………….(2)

如果存在無窮多個正整數 k 使得 $f(k)=k$，則對任意一個固定的 $n\in\mathbb{N}$ 和每一個滿足 $f(k)=k$ 的正整數 k，$k^2+f(n)=(f(k))^2+f(n)$ 可以整除 $(k^2+n)^2$。又

$$(k^2+n)^2=[(k^2+f(n))+(n-f(n))]^2=A(k^2+f(n))+(n-f(n))^2，$$

即 $(n-f(n))^2=(k^2+n)^2-A(k^2+f(n))$ 其中 A 為某一整數。於是可知 $(n-f(n))^2$ 能被 $k^2+f(n)$ 整除。因為有無窮多個 k 滿足此性質，所以，$(n-f(n))^2=0$；因此，對所有的 $n\in\mathbb{N}$，$f(n)=n$。

現在，我們僅須再證明：存在無窮多個正整數 k 使得 $f(k)=k$。

對於任意的質數 p，由(1)式可得 $1+f(p-1)\,\big|\,p^2$；所以，

$$f(p-1)+1=p \text{ 或 } f(p-1)+1=p^2。$$

若 $f(p-1)+1=p^2$，由(2)式可知 $(p^2-1)^2+1$ 是 $[(p-1)^2+1]^2$ 的因數。但 p 是質數，$p>1$，所以，$(p^2-1)^2+1>(p-1)^2(p+1)^2$。又

$$[(p-1)^2+1]^2\le[(p-1)^2+(p-1)]^2=(p-1)^2p^2，矛盾！$$

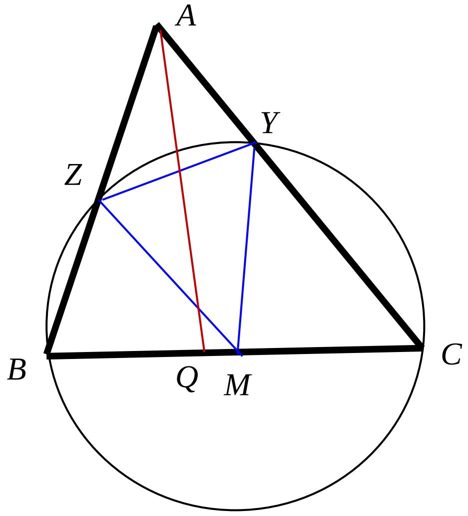
因此，$f(p-1)+1=p$，得知 $f(p-1)=p-1$；即對所有的質數 p，$f(p-1)=p-1$。

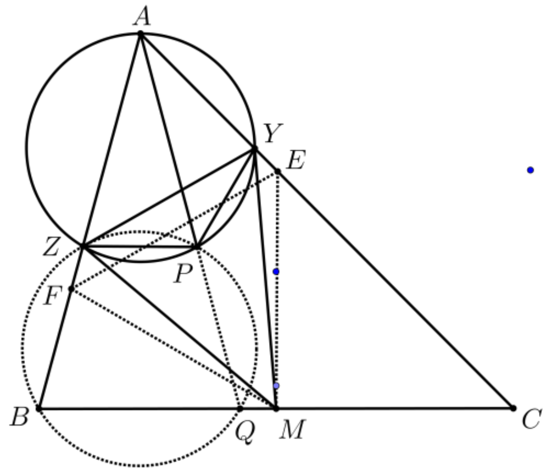
因為有無窮多個質數 p，所以，有無窮多個正整數 $k=p-1$ 使得 $f(k)=k$。

編號	【筆試二】第二題　G 3
類別	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)
試題來源	■ 自編　☐ 改編於：
類易度	☐ 難　■ 中等　☐ 易　**滿分 8 人**

【筆試二】第二題

設 ΔABC 是銳角三角形，M 是 $\overline{BC}$ 的中點，$\angle A$ 的分角線與 $\overline{BC}$ 交於點 Q，又點 Y, Z 分別在 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 上，且 ΔMYZ 的內心為 P。已知 B,C,Y,Z 四點共圓，且 A,Y,P,Z 四點共圓，試證：B,Z,P,Q 四點共圓。





【解】

因 A,Y,P,Z 共圓，$\angle PYZ+\angle PZY=\angle PAZ+\angle PAY=\angle A$。所以，

$$\angle YMZ=180^\circ-2(\angle PYZ+\angle PZY)=180^\circ-2\angle A\text{。}$$

設以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓分別與 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 交於點 E, F，則 $\overline{BE}\perp\overline{CA}, \overline{CF}\perp\overline{AB}$，推得

$$\angle EMF=2\angle FBE=2(90^\circ-\angle A)=\angle YMZ\text{。}$$

因 $\angle AYZ=\angle B=\angle AEF$，得 $YZ \parallel EF$。若 Y 在線段 $\overline{AE}$ 內(外)，則 Z 在 $\overline{AF}$ 內(外)，故 $\angle EMF>(<)\angle YMZ$。但 $\angle EMF=\angle YMZ$，所以，Y 與 E 重合、Z 與 F 重合。

由此可知 $\overline{MY}=\overline{MZ}$，得 $\angle PAZ=\angle PYZ=\angle PZY=\angle PAY$，即 $\overrightarrow{AP}$ 是 $\angle A$ 的分角線，故 A,P,Q 共線。因此可得 $\angle ZPA=\angle ZYA=\angle B$，所以，$B,Z,P,Q$ 四點共圓。

編號	【筆試二】第三題　C 10
類別	□ 代數(A)　□ 數論(N)　幾何(G)　■ 組合(C)
試題來源	■ 自編　□ 改編於：
類易度	■ 難　□ 中等　□ 易　**滿分 7 人**

【筆試二】第三題

在正 n 邊形的每個頂點上放置一顆石頭，並按以下規則操作：每一次操作可以選擇兩個相鄰的頂點並交換石頭。試問至少需要操作多少次，才會使得每顆石頭以順時針方向數都距離其初始位置恰好 $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ 格？其中符號 $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ 表示不大於 $\dfrac{n}{2}$ 的最大整數。

【解】

令 $k=\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$。首先，證明 $k(n-k)$ 是操作次數 T 的一個下界。令第 i 個頂點上的石頭以順時針方向移動 a_i 格，而逆時針方向移動 b_i 格，則有 $a_i-b_i\equiv k \pmod n$。可令

$$a_i-b_i=c_in+k\text{ ，其中 } c_i \text{ 為整數，} i=1,2,3,\cdots,n\text{ 。}$$

因為全部的操作次數 $T=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$ ，可得

$$0=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n}(c_in+k)=n\sum_{i=1}^{n}c_i+kn\text{ 。}$$

因此，$\sum_{i=1}^{n}c_i=-k$ 。將 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 由大而小重排，不失一般性，可令 $c_1\ge c_2\ge\cdots\ge c_n$ 。

（1）當 $c_{n-k+1}\ge 0$ 時， $c_1\ge c_2\ge\cdots\ge c_{n-k}\ge 0$ ，故 $c_1+c_2+\cdots+c_{n-k}\ge 0$ 。

（2）當 $c_{n-k+1}<0$ 時， $c_n\le c_{n-1}\le\cdots\le c_{n-k+1}\le -1$，故

$$c_1+c_2+\cdots+c_{n-k}=\sum_{i=1}^{n}c_i-\sum_{i=n-k+1}^{n}c_i\ge -k-\sum_{i=n-k+1}^{n}(-1)=0\text{ 。}$$

由此可得全部的操作次數

$$T=\sum_{i=1}^{n}a_i\ge\sum_{i=1}^{n-k}a_i=\sum_{i=1}^{n-k}(b_i+c_in+k)\ge\sum_{i=1}^{n-k}k=k(n-k)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\left(n-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\text{ 。}$$

其次，構造一個可達到下界的操作方式：依順時針將石頭編號 $1,2,3,\cdots,n$ ，先將編號 1 的石頭順時針方向移動 k 格(此時，編號 $2,3,\cdots,k+1$ 的石頭逆時針方向各移動 1 格)，接著，將編號 $k+2,k+3,\cdots,n$ 的石頭順時針方向各移動 k 格(此時編號 $2,3,\cdots,k+1$ 的石頭再依逆時針方向各移動 $n-k-2$ 格)；每顆石頭以順時針方向數都距離其初始位置恰好 k 格，且操作次數 $T=k+k(n-k-1)=k(n-k)$ 。

編號	【口試】第一題　N 5
類別	□ 代數(A)　■ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)
試題來源	□　自編　　■ 改編於：2006 我愛數學夏令營
類易度	□ 難　■中等　□ 易

【口試】第一題

正整數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足：對於每一個正整數 k， a_{k+1} 等於 a_k 的每一位數字之和的平方；例如：當 $a_k = 25$ 時， $a_{k+1} = (2+5)^2 = 49, a_{k+2} = (4+9)^2 = 169$ 。已知 $a_1 = 2^{2020}$ ，試求 a_{2020} 的值。

【解】

利用 $2^{n+6} \equiv 2^n \pmod 9$，由 $2020 = 6\times 336 + 4$，可得

$$a_1 = 2^{2020} \equiv 2^4 \equiv 7 \pmod 9。$$

因此，$a_2 \equiv 7^2 \equiv 4 \pmod 9$、$a_3 \equiv 4^2 \equiv 7 \pmod 9$。

進一步利用數學歸納法，可得

$$a_{2m} \equiv 4 \pmod 9 \text{ 且 } a_{2m+1} \equiv 7 \pmod 9。$$

令 $S(a_n)$ 表示 a_n 的每一位數字之和。由 $a_1 = 2^{2020} < 2^{3\times 674} < 10^{674}$，得知

$$S(a_1) < 9\times 674 = 6066 。$$

因此， $a_2 < 6066^2 < 37\times 10^6$ ；故 $S(a_2) < 2+9\times 7 = 65$。

依序可得 $a_3 < 65^2 < 43\times 10^2 \Rightarrow S(a_3) < 3+9\times 3 = 30$。因此，

$$a_4 < 30^2 \text{ 且 } a_4 \equiv 4 \pmod 9。$$

故 a_4 的所有可能值為 $a_4 = 2^2, 7^2, 11^2, 16^2, 20^2, 25^2, 29^2$ 。

由此可知， $a_5 = 4^2 = 16$ 或 $a_5 = 13^2 = 169$。再依序可推得：

$$a_6 = 49 \text{ 或 } 256，a_7 = 169、a_8 = 256、a_9 = 169、a_{10} = 256。$$

一般而言，當 $n \ge 4$ 時，$a_{2n-1} = 169$、$a_{2n} = 256$ ，故 $a_{2020} = 256$ 。

編號	【口試】第二題　C 5
類別	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)
試題來源	■ 自編　☐ 改編於：
類易度	☐ 難　■ 中等　☐ 易

【口試】第二題

(1) 考慮 $\{1,2,3,4,5\}$ 的三個非空子集，滿足這三個集合的交集為空集合，且兩兩交集非空。試問這樣的三個集合有多少種？

(2) 若改為 $\{1,2,3,4,5\}$ 的四個非空子集，滿足此四個集合的交集為空集合，且任三集合交集非空。試問這樣的四個集合有多少種？

【解】

(1) 題目的三集合是無順序的，但為了方便，我們先假設三集合名為 A,B,C。畫出 Venn Diagram 後，先觀察下列三集合的元素個數：$|A\cap B|,|B\cap C|,|C\cap A|$。

(a) 若三個數皆為 1，則有 $C_1^5\times C_1^4\times C_1^3=60$ 種選法，其他兩個未出現的元素填入

$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$、$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$、$\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$、$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$，

有 $4^2=16$ 種方法，計有 $60\times16=960$ 種。

(b) 若三個數有兩個 1，一個 2，則有 $C_2^5\times C_1^3\times C_1^2\times3=180$ 種，剩一個元素填入 $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$、$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$、$\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$、$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$，有 4 種方法，計有 720 種。

(c) 若三個數有兩個 1，一個 3，則有 $C_3^5\times C_1^2\times C_1^1\times3=60$ 種。

(d) 若三個數有兩個 2，一個 1，則有 $C_1^5\times C_2^4\times C_2^2\times3=90$ 種。

以上加起來有 960 + 720 + 60 + 90 = 1830 種，但集合是無序的，所以要除以 3! = 6，得 $\frac{1830}{6}=305$ 種。

(2) 改成四個集合 A, B, C, D 時，一樣先觀察任三個集合交集的元素個數：

$$|A\cap B\cap C|,|B\cap C\cap D|,|C\cap D\cap A|,|D\cap A\cap B|。$$

(a) 若四個數皆為 1，則有 $C_1^5\times C_1^4\times C_1^3\times C_1^2=120$ 種選法，剩下一個未出現的元素填入其他 $2^4-4-1=11$ 個集合中 (集合 $A\cap B\cap C\cap D$ 除外)，即有 11 種選法，故計有 $120\times11=1320$ 種。

(b) 若四個數有三個 1，一個 2，則有 $C_2^5\times C_1^3\times C_1^2\times C_1^1\times4=240$ 種。

但集合是無序的，所以加起來後要除以 4! = 24，得 $\frac{1320+240}{24}=65$ 種。

編號	**【獨立研究一】第一題** N 1
類別	☐ 代數(A) ■ 數論(N) ☐ 幾何(G) ☐ 組合(C)
試題來源	■ 自編 ☐ 改編於：
類易度	☐ 難 ■ 中等(中偏難) ☐ 易

【獨立研究一】第一題

已知n為正整數，且$n\cdot 2^{n-1}+1$為完全平方數，試求所有可能的n值。

【解】

由已知條件，可令 $n\cdot 2^{n+1}+1=m^2$ ，則 $n\cdot 2^{n-1}=(m-1)(m+1)$ 。

顯然，$n=1,\ 2,\ 3$代入不成立，所以，$n\geq 4$ 。

又$n\cdot 2^{n-1}=(m-1)(m+1)$ ，且值為偶數，得知 m 必為奇數。

令$m=2k+1$ ，則$n\cdot 2^{n-3}=k(k+1)$ 。…………………………………………………(1)

因為連續整數k和$k+1$互質，所以，2^{n-3}可整除k或$k+1$。

由此得$2^{n-3}\leq k+1$，再由（1）式可推得$n\geq k$；因此，$2^{n-3}\leq n+1$。

又由數學歸納法可知：當$n\geq 6$時，$2^{n-3}>n+1$，不合；故$n=4$ 或 $n=5$ 。

當$n=4$時，$4\cdot 2^3+1=33$不是完全平方數，但$n=5$時，$5\cdot 2^4+1=81$是完全平方數。

因此，所求n之值只有一個，即$n=5$。

編號	**【獨立研究一】第二題** C 3
類別	□ 代數(A) □ 數論(N) □ 幾何(G) ■ 組合(C)
試題來源	□ 自編 ■ 改編於：RMC 1998
難易度	□ 難 ■ 中等 □ 易

【獨立研究一】第二題

在平面 $x+2y+3z=4$ 上有一凸十邊形，其頂點均為格子點（即 x 坐標、y 坐標、z 坐標均為整數的點）。試證此凸十邊形的面積不小於 5 平方單位。

【解】

凸十邊形可用一對角線切割成兩個凸五邊形，因此，僅須證明平面 $x+2y+3z=4$ 上，每一個凸五邊形 $S:ABCDE$ 的面積都不小於 $\dfrac{5}{2}$ 平方單位。

注意：平面 $x+2y+3z=4$ 上的格子點之 x 坐標與 z 坐標有相同的奇偶性。將此平面上的格子點分成四類：(偶, 偶, 偶), (偶, 奇, 偶), (奇, 偶, 奇), (奇, 奇, 奇)。

因此，由鴿籠原理得知：在格子點 A,B,C,D,E 中必有兩點的中點也是格子點。

以下的操作方式可以證明凸五邊形 S 的內部必有一格子點。

首先，利用格子點 A,B,C,D,E 中某兩點的中點 E_1 也是格子點。若 E_1 不在凸五邊形 S 的邊上，則 E_1 即為 S 的內點。若 E_1 在 S 的邊上，設 $E_1\in\overline{AE}$，則將 S 刪掉 ΔDEE_1 成為一較小的凸五邊形 $S_1:ABCDE_1$。此時，格子點 A,B,C,D,E_1 中也會有某兩點的中點 E_2 也是格子點。若 E_2 不在凸五邊形 S_1 的邊上，則 E_2 為 S_1 的內點。若 E_1 在 S_1 的邊上，則仿前面的方式，刪掉某一三角形後可得到一較小的凸五邊形 S_2，且每一頂點都是格子點。因為凸五邊形 S 的內部及邊界上最多只有有限個格子點，依上述的操作有限次後就可得到頂點都是格子點的最小凸五邊形 S_k，其各邊的中點都不是格子點。此時，S_k 的內部就一定有格子點 F。此點 F 也在 S 的內部，並將 S 分成五個格子頂點的三角形：

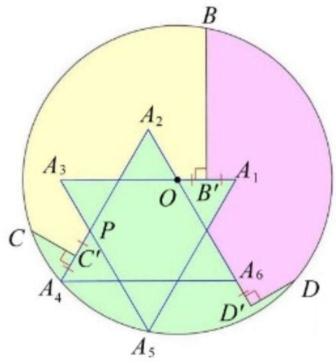
$$\Delta FAB,\Delta FBC,\Delta FCD,\Delta FDE,\Delta FEA。$$

又每一個格子頂點三角形的面積至少是 $\dfrac{1}{2}$，故凸五邊形 $S:ABCDE$ 的面積不小於 $\dfrac{5}{2}$ 平方單位。

編號	**【獨立研究一】第三題**　G 11
類別	□ 代數(A)　□ 數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)
試題來源	□ 自編　■ 改編於：日本社團「數學愛好協會」的活動
類易度	□ 難　■ 中等　□ 易

【獨立研究一】第三題

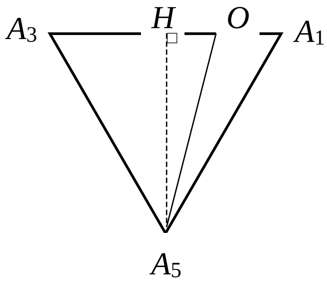
日本社團「數學愛好協會」舉辦「圓形蛋糕切三等分大賽」，下圖為最優秀獎的切法。其數學結構說明如下：



1. 點 O 為圓心。
2. 六角星的頂點 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 為正六邊形的六個頂點，且 $\overline{OA_1}:\overline{OA_3}=1:2$。
3. B'、C' 分別為 $\overline{OA_1}$，$\overline{PA_4}$ 的中點，且 $\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 分別與 $\overline{OA_1}$、$\overline{PA_4}$ 垂直。
4. D' 在 $\overline{OA_6}$ 的延長線上，$\overline{A_6D'}=\overline{OB'}$，且 $\overline{DD'}$ 與 $\overline{OA_6}$ 垂直。

已知 $\overline{OB'}=1$，試證：B,C,D 將圓周三等分。

【解】



(1) 由 $\overline{OA_1}:\overline{OA_3}=1:2$ 且 $\overline{OB_1}=\overline{A_1B_1}=1$ 的中點，可得

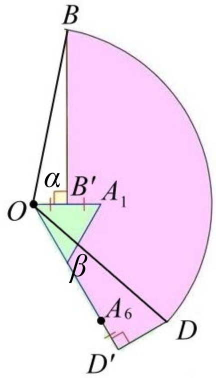
$\overline{OA_1}=2$，$\overline{OA_3}=4$，且正三角形 $A_1A_3A_5$ 的邊長 6。

過 A_5 作正三角形的高，可得

$\overline{A_5H}=3\sqrt{3}$ 且 $\overline{OH}=1$，

故此圓的半徑 $\overline{OA_5}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2\sqrt{7}$。

(2) 設 $\alpha=\angle BOB'$，$\beta=\angle DOD'$。



因為 $\overline{OB}$ 等於圓半徑 $2\sqrt{7}$ 且 $\overline{OB'}=1$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$。

又 $\overline{OD}$ 等於圓半徑 $2\sqrt{7}$ 且 $\overline{OD'}=4+1=5$，所以 $\cos\beta=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$。

最後，我們可以證明 $\angle BOD$ 的角度為 $120°$。

由 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，$\cos\beta=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$ 可得 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{189}}{14}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$。

因此，

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{14}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}+\frac{3\sqrt{21}}{14}\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{35+63}{14^2}=\frac{1}{2}，$$

故 $\alpha-\beta=60°$，而 $\angle BOD=\alpha+60°-\beta=60°+(\alpha-\beta)=120°$。

編號	**【獨立研究二】第一題** A 10
類別	■ 代數(A) □ 數論(N) □ 幾何(G) □ 組合(C)
試題來源	□ 自編 ■ 改編於：Crux Mathematicorum, 40 (8), 2014
類易度	□ 難 □ 中等 ■ 易

【獨立研究二】第一題

設正實數 x, y, z 滿足 $3(x+y+z)^2 = 10(xy+yz+zx)$，試求 $\dfrac{x}{z}$ 的最大可能值。

【解】

原式兩邊展開後，整理可得

$$3(x^2+y^2+z^2) = 4(xy+yz+zx) 。$$

令 $k = \dfrac{x}{z}$ 及 $w = \dfrac{y}{z}$，上式可整理成

$$3w^2 - 4(k+1)w + (3k^2 - 4k + 3) = 0 。$$

上面 w 的二次方程式有實根，故其判別式

$$\Delta = 16(k+1)^2 - 4 \times 3 \times (3k^2 - 4k + 3) \geq 0 ，$$

即 $k^2 - 4k + 1 \leq 0$。可解得 $2-\sqrt{3} \leq k \leq 2+\sqrt{3}$，故 $\dfrac{x}{z}$ 的最大可能值為 $2+\sqrt{3}$。

例如：當 $w = 2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 時，$k = 2+\sqrt{3}$。

另解：原式兩邊同除以 z^2，可得

$$3\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right)^2 = 10\left(\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}\right) 。$$

令 $k = \dfrac{x}{z}$ 及 $w = \dfrac{y}{z}$，上式可整理成

$$3w^2 - 4(k+1)w + (3k^2 - 4k + 3) = 0 。$$

仿上面的過程，可推得 $k = \dfrac{x}{z}$ 的最大可能值為 $2+\sqrt{3}$。

編號	【獨立研究二】第二題　G 5
類別	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)
試題來源	■ 自編　☐ 改編於：
類易度	☐ 難　☐ 中等　■ 易

【獨立研究二】第二題

試確定所有可能的正整數 $n\geq 2$，滿足以下的性質：「對空間中任意 $2n$ 邊形(頂點可能不在同一平面上)，當它的 n 組對邊互相平行且相等時，各邊的中點必在同一平面上」。

【解】

(1) 當 $n=2$ 時，該四邊形都是平行四邊形，故其各邊的中點在同一平面上。

(2) 當 $n=3$ 時，設六邊形為 $ABCDEF$，其各邊中點分別為 A',B',C',D',E',F'。

由 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DE}$ 平行且相等，得知 $ABDE$ 為一平行四邊形，設兩對角線 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 P。利用平行四邊形的對角線互相平分，故 P 為 $\overline{AD}$ 的中點，也是 $\overline{BE}$ 的中點。同理，可得三條對角線 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ 都交於點 P，且 P 為此三條對角線的中點。今以點 P 為原點，令 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{a},\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{b},\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{c}$，則

$$\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{a},\overrightarrow{PE}=-\overrightarrow{b},\overrightarrow{PF}=-\overrightarrow{c}\text{。}$$

因此，

$$\overrightarrow{PA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}),\overrightarrow{PB'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}),\overrightarrow{PC'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})\text{，且}$$

$$\overrightarrow{PD'}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}),\overrightarrow{PE'}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}),\overrightarrow{PF'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})\text{。}$$

因為 $\overrightarrow{PA'}=\overrightarrow{PB'}-\overrightarrow{PC'}$，得 P,A',B',C' 四點共面。同理，P,B',C',D' 四點共面，P,C',D',E' 四點共面，P,D',E',F' 四點共面；故各邊中點 A',B',C',D',E',F' 都在同一平面上。

(3) 當 $n\geq 4$ 時，可取 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n}$ 的頂點坐標為

$$A_i(\cos\frac{i-1}{n-1}\pi,\sin\frac{i-1}{n-1}\pi,0),\ A_{n+i}(\cos\frac{n+i-2}{n-1}\pi,\sin\frac{n+i-2}{n-1}\pi,1)\quad(i=1,2,3,\cdots,n)\text{，}$$

則此 $2n$ 邊形的各邊中點不在同一平面上。

因此，滿足條件的正整數 $n=2$ 或 $n=3$。

編號	【獨立研究二】第三題　N 3
類別	□ 代數(A)　■ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)
試題來源	■ 自編　□ 改編於：
類易度	□ 難　■ 中等　□ 易

【獨立研究二】第三題

試求所有可能的二次整係數多項式函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 及整數 d，同時滿足以下兩條件：

(1) $|f(f(0))|\le 2020$，

(2) $f(f(1))=f(f(2))=f(f(3))=d$。

【解】

注意：$f(f(p))-f(f(q))=a\left((f(p))^2-(f(q))^2\right)+b\left((f(p))-(f(q))\right)+c(1-1)$

$$=\left(f(p)-f(q)\right)\left(af(p)+af(q)+b\right)。$$

利用條件(2) $\begin{cases} f(f(2))-f(f(1))=0 \\ f(f(3))-f((2))=0 \end{cases}$，可得 $\begin{cases} (3a+b)(5a^2+3ab+2ac+b)=0 \\ (5a+b)(13a^2+5ab+2ac+b)=0 \end{cases}$。

若 $3a+b=5a+b=0$，得 $a=0$ 不合；故 $3a+b$ 與 $5a+b$ 兩者不能全為 0。

(1) 當 $3a+b=0$ 時，$5a+b\neq 0$，故 $13a^2+5ab+2ac+b=0$；以 $b=-3a$ 代入，

化簡得到 $2(c-a)=3$ (不合)。

(2) 當 $5a+b=0$ 時，$3a+b\neq 0$，故 $5a^2+3ab+2ac+b=0$；以 $b=-5a$ 代入，

化簡得到 $2(c-5a)=5$ (不合)。

(3) 當 $13a^2+5ab+2ac+b=0$ 且 $5a^2+3ab+2ac+b=0$ 時，兩式相減，可得

$b=-4a$。

代入化簡得到 $7a=2c-4$。因此，a 必為偶數。

令 $a=2k$，則 $b=-8k, c=7k+2$，即 $f(x)=(2k)x^2-(8k)x+(7k+2)$。

又 $2020\ge|f(f(0))|=|f(2k+7)|=|98k^3-k+2|$，得 $k=-2,-1,0,1,2$，其中 $k=0$ 不合。

故所求 $f(x)=-4x^2+16x-12$ 或 $-2x^2+8x-5$ 或 $2x^2-8x+9$ 或 $4x^2-16x+16$。

經檢驗此四個函數也都滿足條件(2)，其對應的 d 值分別為 $-12,1,3,16$。