高雄市 96 學年度市立高級中等學校教師聯合甄選數學科試題

一. 計算題:(每題 6 分, 共 72 分)

1. 設$n\in N$，$n>2$，以圓之內接正$2n$邊形的$2n$個頂點中任取三點為三角形的頂點，則共可作成幾個直角三角形？幾個鈍角三角形？(答案以n表示) $2n(n-1)$ $n(n-1)(n-2)$

2. 已知$0\le\alpha,\beta\le 2\pi$，且$A=(2\cos\alpha-3\cos\beta-6)^2+(2\sin\alpha-3\sin\beta+8)^2$，試求 A 值的範圍。 $25\le A\le 225$

3. 在空間中兩點$A(-1,1,3),B(3,1,5)$，若球面 S 過 A、B 兩點，且球心在平面 E：$5x-2y+5z-14=0$上，滿足此條件的球面 S 有無限多個，則其中半徑最小為多少？ $\sqrt{14}$

4. 過$A(1,2)$作直線，與拋物線$x^2=5y$交於二點 P，Q，若$\angle POQ$為直角，O 為原點，試求$\overline{PQ}$之方程式。 $y=-3x+5$

5. 已知$x>y>0$,且$xy=1$， 求$\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$的最小值？及此時x,y之值？ $\min=2\sqrt{2}$ $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

6. 若函數$f(x)=x^2(1-x)+t(x+1)$, 在區間$(-1，1)$上是增函數，求t之範圍。 $t>5$

7. 已知數列$\langle a_n\rangle$中，$a_1=1$，且當$n\ge 2$時，$S_{n-1}-S_n=2S_{n-1}\cdot S_n$，求$S_n=?$ (以n表示) $S_n=\dfrac{1}{2n-1}$

8. 在$(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$的展開式中，係數為有理數的項共有幾個？ 17 項

背面有試題

9. 設實數 c,d,x,y，滿足 $\begin{cases} cx+dy=3 \\ cx^3+dy^3=16 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} cx^2+dy^2=7 \\ cx^4+dy^4=42 \end{cases}$，試求：

cx^5+dy^5 之值。 20

10. 試求出滿足下述兩方程式的所有數對 (x,y)，其中 $x>0$ 而

$(\frac{4}{3},\frac{\pi}{10})$、$(\frac{4}{3},\frac{5}{10}\pi)$、$(\frac{4}{3},\frac{9}{10}\pi)$

$0\le y<2\pi$：$\cos y+\frac{1}{3}\sin 4y=x\cos y$，$\sin y+\frac{1}{3}\cos 4y=x\sin y$。 $(\frac{4}{3},\frac{13}{10}\pi)$、$(\frac{4}{3},\frac{17}{10}\pi)$

11. 試求 $\sum_{k=1}^{49}k^2C_k^{49}$ 為幾位數？（$\log 2=0.3010$，$\log 7=0.8451$） $(\frac{2}{3},\frac{3}{10}\pi)$、$(\frac{2}{3},\frac{7}{10}\pi)$、$(\frac{2}{3},\frac{11}{10}\pi)$

18位

$(\frac{2}{3},\frac{15}{10}\pi)$、$(\frac{2}{3},\frac{19}{10}\pi)$

12. 求所有自然數 n，使得 $\begin{cases} x_1+\cdots+x_n=8 \\ \frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}=2 \end{cases}$ 有正實數解。

$n=2,3,4$

二. 證明題:(28 分)

1. 設 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，試證：$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=2$ (10 分)

2. 試證：當 a,p 其一為無理數時，

$[(1-a)+(1+a)i]x_1+[(1+a)-(1-a)i]x_2+ap(1-i)x_3+ap(1+i)x_4=ap$，無整數解。(10 分)

3. 已知：A、B、C、D 為空間中四點，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

求證：$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ (8 分)