

110 年大學入學學力測驗數學試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 65 分）

一、單選題（佔 30 分）

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，若 $A^4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？
(1)158 (2)162 (3)166 (4)170 (5)174。

【110 年學測】

答：(2)

解： $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ ， $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 0 & 81 \end{bmatrix}$

2. 五項實數數列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1 = \log_{10} 36$ ，則 a_5 有多少種可能的值？
(1)3 (2)4 (3)5 (4)7 (5)8。

【110 年學測】

答：(1)

解： $1 < a_1 = \log_{10} 36 < 2$ ， $a_2 = 2a_1$ ，

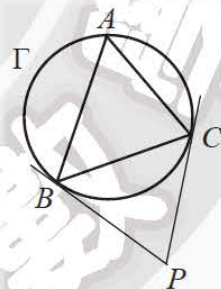
$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = a_1, a_4 = 2a_1 \\ a_3 = 4a_1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a_5 = a_1 \\ a_5 = 4a_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 = 2a_1 \\ a_4 = 8a_1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a_5 = a_1 \\ a_5 = 4a_1 \\ a_5 = 16a_1 \end{array} \right.$$

3. 如圖， $\triangle ABC$ 為銳角三角形， P 為 $\triangle ABC$ 外接圓 Γ 外的一點，且 \overline{PB} 與 \overline{PC} 都與圓 Γ 相切。設 $\angle BPC = \theta$ ，試問 $\cos A$ 的值為下列哪一個選項？

- (1) $\sin 2\theta$ (2) $\frac{\sin \theta}{2}$ (3) $\sin \frac{\theta}{2}$
(4) $\frac{\cos \theta}{2}$ (5) $\cos \frac{\theta}{2}$ 。

【110 年學測】



答：(3)

解： $\angle BPC = \theta$ ， $\angle BOC = 180^\circ - \theta$ ， $\angle BAC = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$

$$\cos A = \cos \left(90^\circ - \frac{\theta}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2}$$

4. 設 \vec{a} 與 \vec{b} 都是平面上不為零的向量。若 $2\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 所張成的三角形面積為 6，則 $3\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 所張成的三角形面積為下列哪一個選項？
(1)8 (2)9 (3)12 (4)13.5 (5)16。

【110 年學測】

答：(5)

解： $\left\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \right\| = 3 \times \left\| \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \right\| = 6 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \right\| = 2$

$\left\| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \right\| = 8 \times \left\| \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \right\| = 16$

5. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數，滿足 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的餘式為 $x+2$ 。若 $f(0)=4$ ，則 $f(2)$ 的值為下列哪一個選項？
(1)8 (2)10 (3)15 (4)18 (5)20。

【110 年學測】

答：(4)

解： $(x+1)f(x) = (x^3+2)(ax+p) + x+2$

$x=0$ 代入 $\Rightarrow (1)(4) = (2)(p) + 0 + 2 \Rightarrow p=1$

$x=-1$ 代入 $\Rightarrow 0 = (1)(-a+p) - 1 + 2 \Rightarrow a=2$

$x=2$ 代入 $\Rightarrow (3)f(2) = (10)(5) + 2 + 2 \Rightarrow f(2)=18$

6. 坐標平面上有一邊長為3的正六邊形 $ABCDEF$ ，其中 $A(3,0)$ 、 $D(-3,0)$ 。試問橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 與正六邊形 $ABCDEF$ 有多少個交點？
(1)0 (2)2 (3)4 (4)6 (5)8。

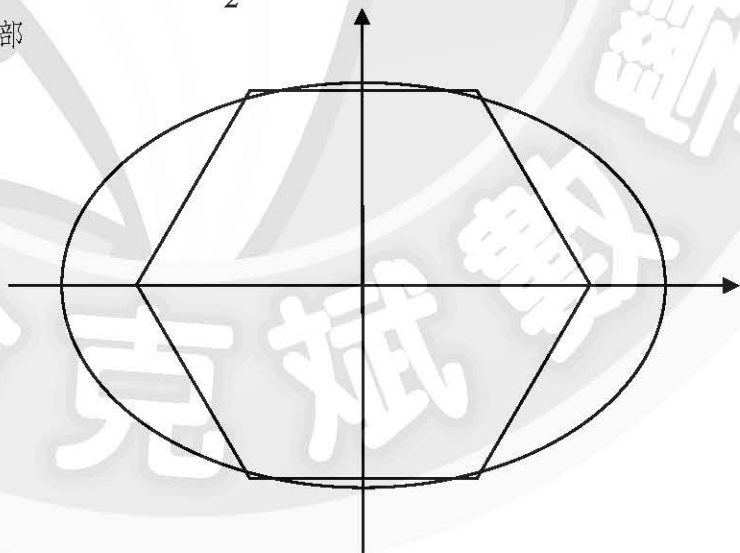
【110 年學測】

答：(5)

解：橢圓 $a=4$ ， $b=\sqrt{7}$ ， $c=3$ ， A 、 D 為焦點

$\because \overline{BA} + \overline{BD} = 3 + 3\sqrt{3} > 2a = 8$ 且 $b = \sqrt{7} > \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore B$ 、 C 、 E 、 F 在橢圓外部
表正六邊形與橢圓交於8點



二、多選題 (佔 30 分)

7. 心理學家找了1000位受試者進行暗室實驗，每位受試者都要觀看及辨識6、8、9三張數字卡，發現將實際數字看成某個數字的機率如下表：

看成數字 實際數字	6	8	9	其他
6	0.4	0.3	0.2	0.1
8	0.3	0.4	0.1	0.2
9	0.2	0.2	0.5	0.1

例如：實際數字6被看成6、8、9的機率分別為0.4、0.3、0.2，而被看成其他數字的機率是0.1。根據上述實驗結果，試選出正確的選項。

- (1)如果實際數字是8，則至少有一半的可能性會被看成是8
 (2)如果實際數字是6，則有六成的可能性會被看成不是6
 (3)在6、8、9三數字中，被誤認的可能性以9最低
 (4)如果被看成的數字是6，則實際上就是6的可能性不到一半
 (5)如果被看成的數字是9，則實際上就是9的可能性超過 $\frac{2}{3}$ 。

【110年學測】

答：(2)(3)(4)

解：(1)應為0.4

(2)正確： $0.3+0.2+0.1=0.6$

(3)正確：6被誤認的機率：0.6，8被誤認的機率：0.6，9被誤認的機率：0.5

(4)正確： $\frac{0.4}{0.4+0.3+0.2}=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$

(5)應為： $\frac{0.5}{0.2+0.1+0.5}=\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$

8. 如圖， L 為坐標平面上通過原點 O 的直線， Γ 是以 O 為圓心的圓，且 L 與 Γ 有一個交點 $A(3, 4)$ 。已知 B 、 C 為 Γ 上的相異兩點滿足 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$ 。試選出正確的選項。

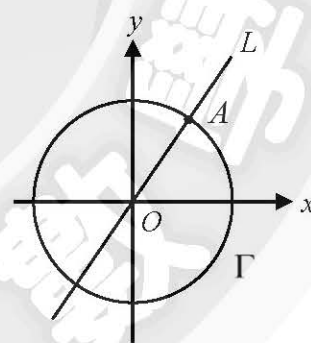
(1) L 與 Γ 的另一個交點為 $(-4, -3)$

(2)直線 BC 的斜率為 $\frac{3}{4}$

(3) $\angle AOC = 60^\circ$

(4) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

(5) B 與 C 在同一象限內。



【110年學測】

答：(3)(5)

解：(1)應為 $(-3, -4)$ (2)應為 $\frac{4}{3}$

(3) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = \text{半徑 } 5$
 $\Rightarrow \triangle OAC, \triangle OBC$ 均為正 $\triangle \Rightarrow \angle AOC = 60^\circ$

(4)承(3)， $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2} \times 5^2 \times \sin 120^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

(5) $\because 45^\circ < \angle AOX < 60^\circ$ ，承(3)，故 B 與 C 可能同在第二或四象限

9. 某村的村長選舉設有兩個投票所。已知兩位候選人在各投票所得到的有效票數比例如下表（廢票不列入計算）：

	甲候選人	乙候選人
第一投票所	40%	60%
第二投票所	55%	45%

假設第一投票所與第二投票所的有效票數分別為 x 與 y （其中 $x > 0$ ， $y > 0$ ），且以總得票數較高者為當選人。根據上述表格，試選出正確的選項。

- (1) 當有效票數的總和 $x+y$ 已知時，就可決定當選人
 (2) 當 $x:y$ 的比值小於 $\frac{1}{2}$ 時，就可決定當選人
 (3) 當 $x > y$ 時，就可決定當選人
 (4) 當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時，就可決定當選人
 (5) 當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時，就可決定當選人。

【110 年學測】

答：(2)(3)(4)

解：甲得票 $0.4x + 0.55y$ ，乙得票 $0.6x + 0.45y$

$$\text{甲} > \text{乙} \Leftrightarrow y > 2x \quad \text{甲} < \text{乙} \Leftrightarrow y < 2x \quad \text{甲} = \text{乙} \Leftrightarrow y = 2x$$

(1) 不確定 (2) 甲當選 (3) 乙當選

(4) $0.4x > 0.55y \Rightarrow x > \frac{11}{8}y$ ，乙當選

(5) $0.45y > 0.6x \Rightarrow y > \frac{4}{3}x$ ，不確定

10. 在 $\triangle ABC$ 中，已經知道 $\overline{AB} = 4$ 和 $\overline{AC} = 6$ ，此時尚不足以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件（例如：再知道 \overline{BC} 的長度），就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。

- (1) 如果再知道 $\cos A$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
 (2) 如果再知道 $\cos B$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
 (3) 如果再知道 $\cos C$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
 (4) 如果再知道 $\triangle ABC$ 的面積，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
 (5) 如果再知道 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小。 【110 年學測】

答：(1)(2)

解：(1) SAS

(2) SSA，但可知 $\angle B$ 為鈍或銳角

(3) SSA，但不知 $\angle B$ 為鈍或銳角

(4) 不確定 $\angle A$ 為鈍或銳角

(5) 不確定 $\angle A$ 為鈍或銳角

11. 平面上有一梯形 $ABCD$ ，其上底 $\overline{AB}=10$ 、下底 $\overline{CD}=15$ ，且腰長 $\overline{AD}=\overline{BC}+1$ 。
試選出正確的選項。

- (1) $\angle A > \angle B$ (2) $\angle B + \angle D < 180^\circ$ (3) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$ (4) \overline{BC} 的長可能是 2
(5) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} < 30$ 。

【110 年學測】

答：(1)(2)(5)

解：(1) 腰長 $\overline{AD}=\overline{BC}+1$ ，則必 $\angle A > \angle B$

(2) $\angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180^\circ \xrightarrow{\angle A > \angle B} \xrightarrow{\angle D < \angle C}$ 則必 $\angle B + \angle D < 180^\circ$

$$(3) \cos B = -\cos C = -\frac{\overline{BC}^2 + (15-10)^2 - (\overline{BC}+1)^2}{2 \times \overline{BC} \times (15-10)} = \frac{\overline{BC}-12}{5 \times \overline{BC}}$$

當 $\overline{BC} > 12$ ， $\angle B$ 為銳角

當 $\overline{BC} = 12$ ， $\angle B$ 為直角

當 $2 < \overline{BC} < 12$ ， $\angle B$ 為鈍角

當 $0 < \overline{BC} \leq 2$ ，無圖形

(4) $\overline{BC} > 2$

$$(5) \cos C = -\cos B = \frac{12-\overline{BC}}{5 \times \overline{BC}},$$

$$\text{故 } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{BC} \times 15 \times \cos C = 36 - 3\overline{BC} \xrightarrow{\overline{BC} > 2} < 30$$

12. 設 $P(X)$ 表示事件 X 發生的機率，而 $P(X|Y)$ 表示在事件 Y 發生的條件下，事件 X 發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為 2 顆黑球相鄰的事件，事件 B 為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件 C 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

- (1) $P(A) > P(B)$ (2) $P(C) = \frac{2}{7}$ (3) $2P(C|A) + 5P(C|B) < 2$ (4) $P(C|A) > 0.2$
(5) $P(C|B) > 0.3$ 。

【110 年學測】

答：(2)(5)

$$\text{解：} P(A) = \frac{\frac{6!}{2!3!}}{7!} = \frac{2}{7} \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) = \frac{5}{7} \quad P(C) = \frac{\frac{4!}{2!2!} \times C_3^5}{7!} = \frac{2}{7}$$

$$P(C|A) = \frac{\frac{3!}{2!} \times C_3^4}{\frac{6!}{2!3!}} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad P(C|B) = \frac{\frac{4!}{2!2!} \times C_3^5 - \frac{3!}{2!} \times C_3^4}{\frac{5!}{2!3!} \times C_2^6} = \frac{8}{25} > 0.3$$

$$2P(C|A) + 5P(C|B) = 2$$

13. 設多項式函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a, b, c 均為有理數。試選出正確的選項。

- (1) 函數 $y = f(x)$ 與拋物線 $y = x^2 + 100$ 的圖形可能沒有交點
 (2) 若 $f(0)f(1) < 0 < f(0)f(2)$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 必有三個相異實根
 (3) 若 $1+3i$ 是方程式 $f(x) = 0$ 的複數根，則方程式 $f(x) = 0$ 有一個有理根
 (4) 存在有理數 a, b, c 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 依序形成等差數列
 (5) 存在有理數 a, b, c 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 依序形成等比數列。

【110 年學測】

答：(2)(3)(5)

解：(1) $f(x) - (x^2 + 100) = 0$ 為實係數三次方，至少一實根

(2) $f(0)f(1) < 0$ ， $f(1)$ 與 $f(0)$ 異號

$f(0)f(2) > 0$ ， $f(0)$ 與 $f(2)$ 同號

表區間 $(0, 1)$ ， $(1, 2)$ 內各有一實根

(3) $f(x) = \left(x^2 - 2x + 10\right)\left(x + \frac{c}{10}\right) = 0$ ，有理根 $-\frac{c}{10}$

(4) $\deg f(x) = 3$ ，與一次函數（直線）不可能交於 4 點，故不成立

(5) $\deg f(x) = 3$ ，與指數函數可能交於 4 點，故成立

第貳部分：選擇題（佔 35 分）

A. 某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動，其移動方式如下：

以 8 秒為一週期，每一週期先以每秒 4 單位長等速度移動 6 秒，再休息 2 秒。

如此繼續下去，則此機器貓在開始移動後_____秒會抵達數線上坐標為 116 的位置。

【110 年學測】

答：37

解： $116 = 24 \times 4 + (20)$ ，故時間 $= 8 \times 4 + (5) = 37$

B. 坐標空間中有兩條直線 L_1, L_2 與一平面 E ，其中直線 $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}$ ，

而 L_2 的參數式為 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t (t \text{ 為實數}) \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ 。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，

則 E 的方程式為_____。

【110 年學測】

答： $x - 6y + 4z = 0$

解： $\vec{L_1} \times \vec{L_2} = (2, -3, -5) \times (0, 2, 3) = (1, -6, 4)$

包含 L_1 ，平行 L_2 平面： $x - 6y + 4z = 0$

C. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 這九個數中任意取出三個相異的數，每數被取出的機率皆相等，則三數乘積是一完全平方數的機率為_____。(化成最簡分數)

【110 年學測】

答： $\frac{1}{14}$

解： $C_3^9 = 84$ ，又 $1 \times 2 \times 3 = 6 < 3^2 < 22^2 < 7 \times 8 \times 9$

$4^2 = 1 \times 2 \times 8$ ， $6^2 = 1 \times 4 \times 9 = 2 \times 3 \times 6$ ， $8^2 = 2 \times 4 \times 8$ ， $12^2 = 2 \times 8 \times 9 = 3 \times 6 \times 8$

其他均無可能

$$\text{機率} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

D. 在坐標平面上， Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 $(1,1)$ ，且各邊與坐標軸平行。

已知函數 $y = a \times 2^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為_____。

【110 年學測】

答： $-2 \leq a \leq 6$

解：中心 $(1,1)$ ，四頂點 $(-1,-1)$ 、 $(3,-1)$ 、 $(3,3)$ 、 $(-1,3)$

$$\text{過 } (-1,-1) \Rightarrow -1 = a \times \frac{1}{2} \Rightarrow a = -2$$

$$(3,-1) \Rightarrow -1 = a \times 8 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

$$(3,3) \Rightarrow 3 = a \times 8 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$$

$$(-1,3) \Rightarrow 3 = a \times \frac{1}{2} \Rightarrow a = 6$$

E. 將 $(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號 $(\sqrt[3]{49})^{100} = a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ，且 n 為正整數。

若 a 的整數部分為 m ，則數對 $(m,n) =$ _____。

【110 年學測】

答： $(2, 56)$

$$\text{解：} \log (\sqrt[3]{49})^{100} = 100 \times \frac{2}{3} \log 7 \doteq 56.34 = \log (2. \cdots \times 10^{56})$$

F. 如圖，機器人在地面上從一點 P 出發，按照以下規則移動：

先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45° ；朝新方向前進一公尺後，

依前進方向順時針旋轉 90° ；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45° ；

再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90° ，……，以此類推。已知機器人移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為_____平方公尺。

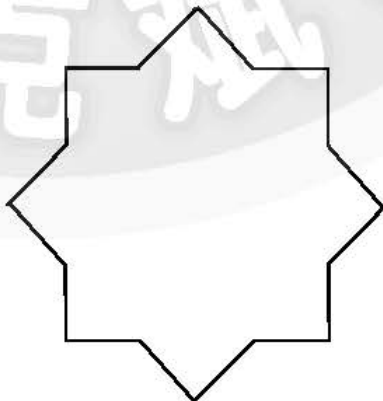
(化成最簡根式)



【110 年學測】

答： $8 + 4\sqrt{2}$

$$\text{解：} (2 + \sqrt{2})^2 + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 4 = 8 + 4\sqrt{2}$$



G. 在四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 4\sqrt{6}$ 、 $\overline{BD} = \overline{CD} = 8$ ，且 $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ ，

則點 D 到平面 ABC 的距離為_____。(化成最簡根式)

【110 年學測】

答： $4\sqrt{2}$

解： $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \angle BAC} = \sqrt{96 + 96 - 2 \times 4\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} \times \frac{1}{3}} = 8\sqrt{2}$

$$\begin{cases} (4\sqrt{6})^2 = x^2 + h^2 \\ (4\sqrt{2})^2 = (8-x)^2 + h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ h = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

