

國立臺中第一高級中學 105 學年度
學術性向資賦優異【數理類】學生入班鑑定安置計畫
數學學科能力評量 試題卷

※說明：答案請化至最簡後，填在答案卷的空格內。

第一部份、填充題：(每題 6 分，合計 72 分)

1. 從正整數 1、2、3、...、2016 中，至少要取出多少個不同的數才保證其中有一個數是 105 的倍數？
答：_____個。

2. 小串寫了一個五位數，它被 9 和 11 整除。
如果去掉萬、百及個位數字，得到的數是 35；
如果去掉萬、千及百位數字，得到的數能被 9 整除；
如果去掉百、十及個位數字，得到的數也能被 9 整除。
求此五位數為_____。

3. 有甲、乙、丙三種不同型的紙板，其中：
甲型：邊長為 5 單位長的正方形，共 5 塊。
乙型：長為 5，寬為 1 單位長的長方形，共 17 塊。
丙型：邊長為 1 單位長的正方形，共 12 塊。
若將這 34 塊紙板，再增加 1 塊上述三種版型之一的紙板，即可重新緊密的排出一個長方形，
則此長方形的面積為_____平方單位。

4. 求方程組 $\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y+z) \end{cases}$ 的正整數解 (x, y, z) 為_____。

5. 已知實數 x, y 滿足 $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{2016x} - \sqrt{2016y} + \sqrt{2016xy} = 2016$ ，求 $x + y$ 的最小值為_____。

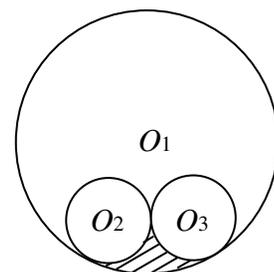
6. 一個凸多邊形的每一個內角都等於 120° ，則這個凸多邊形共有_____條對角線。

7. 投擲一枚公正骰子三次，其三次點數恰為等差數列的機率_____。

8. 已知實數 x, y 滿足 $18^x = 2016$ ， $112^y = 2016$ ，則 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$ _____。

9. 如右圖(一)，圓 O_1 、 O_2 、 O_3 之半徑分別為 3、1、1。

若圓 O_2 、 O_3 與 O_1 相內切，且 O_2 、 O_3 相外切，試求斜線部分之面積為_____。



圖(一)

10. 在坐標平面上， $O(0,0)$ ， $A(\sqrt{3},1)$ ， $\triangle OAB$ 為正三角形，且 B 不在第四象限內。

以 O 為中心，逆時針旋轉 30° ， $\triangle OAB$ 變換成 $\triangle OA'B'$ 。

求 $\triangle OAB$ 區域與 $\triangle OA'B'$ 區域重疊部分的面積為_____。

11. 已知二次函數 $f_n(x) = (n^2 + n)x^2 - (2n + 1)x + 1$ 的圖形與 x 軸所截的線段長度為 L_n ，即 $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$ 之圖形與 x 軸所截的線段長度為 L_1 ， $f_2(x) = 6x^2 - 5x + 1$ 之圖形與 x 軸所截的線段長度為 L_2 ，餘類推。
求 $L_1 + L_2 + \dots + L_{2016}$ 之值為_____。

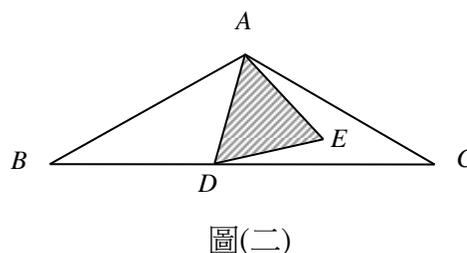
12. 在一個暴雨的黑夜，孤島上的四個人必須走過一座窄橋到陸地上去避難。
過窄橋必須用燈照明，但是他們只有一盞燈，且橋上每次最多只能通過兩個人。
若島上還有人，則過橋之人中必須有人把燈送回去。
如果四個人單獨過橋，那麼所需的時間分別為 2 分鐘、4 分鐘、8 分鐘和 16 分鐘；
如果兩人一起過橋，那麼所需時間依照較慢的人過橋的時間計算。
問：這四個人過橋最少需要_____分鐘。

第二部份、填充題：(每題 7 分，合計 28 分)

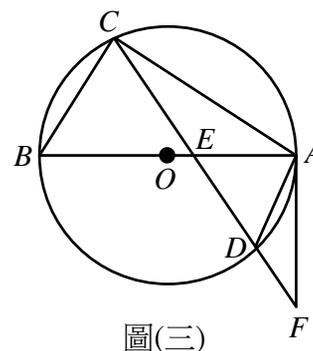
13. 暑假期間，台中一中宿舍裡住了超過 5 名學生，小暢主任任命其中一人擔任舍長。
7 月 15 日時，主任為鼓勵這群學生，買了一些卡片讓住宿學生們互相分享學習心得。
已知宿舍每名同學互贈一張卡片，且每人又贈送給宿舍各樓層的每位管理員一張卡片，
每位宿舍管理員也回贈舍長一張卡片，全部共用去 51 張卡片。
請問一中宿舍裡共住了多少名學生？
答：_____名學生。

14. 串校舉辦五子棋賽，共有 n 名女學生及 $19n$ 名男學生參賽(n 為正整數)，
每名選手都與其餘 $20n - 1$ 名選手各對局一次。
計分方式為：勝者得 2 分，負者得 0 分，和局各得 1 分。
比賽結束後統計發現，男學生得分總和為女學生得分總和的 9 倍，則 n 的所有可能值總和為_____。

15. 如右圖(二)，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ 。
 $\triangle ADE$ 是正三角形，點 D 在邊 \overline{BC} 上且 $\overline{BD} : \overline{CD} = 3 : 5$ 。
若 $\triangle ABC$ 的面積為 64cm^2 ，求 $\triangle ADE$ 的面積為何？
答：_____ cm^2 。



16. 如右圖(三)，已知 \overline{AB} 是圓 O 的直徑，弦 \overline{CD} 與 \overline{AB} 交於 E 。
過 A 的切線與 \overline{CD} 的延長線交於 F ，且 $\overline{AC} = 8$ 、 $\overline{CE} : \overline{ED} = 6 : 5$ 、 $\overline{AE} : \overline{EB} = 2 : 3$ 。
求 \overline{ED} 長為_____。



試題結束

國立臺中第一高級中學 105 學年度
學術性向資賦優異【數理類】學生入班鑑定安置計畫
數學學科能力評量 簡答

第一部份：填充題（每題 6 分，共 72 分）

1 1998	2 63954	3 247	4 (2, 1, 1)	5 $24\sqrt{14}$
6 9	7 $\frac{1}{12}$	8 1	9 $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$	10 $6 - 3\sqrt{3}$
11 $\frac{2016}{2017}$	12 30			

第二部份：填充題(每題 7 分，共 28 分)

13 6	14 1	15 19	16 $2\sqrt{5}$
---------	---------	----------	-------------------